# Table des matières



# 1 Énoncé du problème

Deux tours, hautes de 30 m et de 40 m, sont distantes l'une de l'autre de 50 m. Un puits est situé entre les deux tours.

Deux oiseaux volants à la même vitesse s'envolent en même temps, chacun du sommet de chaque tour, pour se poser au même moment sur le puits.

Comment pourrais-tu faire pour déterminer la position de ce puits entre les deux tours ?

# 2 Choix du problème

## 2.1 Compétences transversales

Ce problème de modélisation d'une situation concrète est très riche car il permet de :
- Travailler sur la notion d'hypothèse (en mathématiques et en sciences).
- Mobiliser des procédures de résolution multiples.
- Travailler la notion d'échelle et la proportionnalité.

## 2.2 Connaissances mathématiques

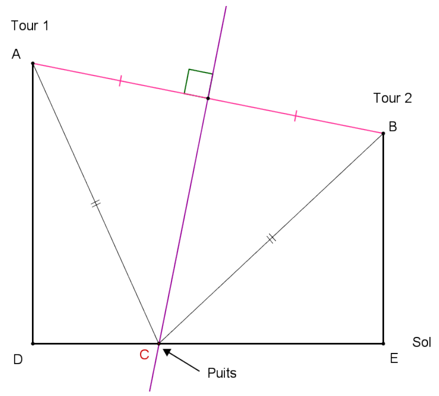
- Construction de médiatrice et utilisation des propriétés de la médiatrice.
- Théorème de Pythagore.
- Développement et réduction d'expressions littérales.
- Mise en équation d'un problème.

# 3 Analyse mathématique du problème

Solutions possibles

*1 - Géométriquement*

Les oiseaux, s'envolant en même temps et volant à la même vitesse, doivent parcourir la même distance pour arriver en même temps sur le puits.
On cherche donc un point qui est équidistant des sommets des tours (nommés A et B sur la figure) et qui est aussi sur le sol : c'est le point d'intersection de la médiatrice du segment [AB] et du segment modélisant le sol.




*2 - Utilisation du calcul littéral et du théorème de Pythagore*

Les longueurs AC et BC doivent être égales. On appelle $x$ la longueur DC.
On a donc : $AC^2 = BC^2$
Par le théorème de Pythagore :
$40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$
$1600 + x^2 = 900 + 2500 - 100x + x^2$
$1800 = 100x$
$x = 18$
Donc $DC = 18m$

Prolongements possibles

Le problème est-il toujours possible si les hauteurs des tours varient ?
On peut imaginer la création d'une maquette avec les élèves, à l'échelle. Les trajectoires étant supposées rectilignes, on peut prendre du fil et laisser glisser une perle de collier ; on peut aussi demander aux élèves de comparer leurs prévisions avec les résultats obtenus sur la maquette.

# 4 Analyse de productions

— Problème de l'échelle :
Certains élèves ont réalisé des dessins à différentes échelles pensant que leur résultat allait changer en fonction de l'échelle.

— Modélisation du problème :
On représente les oiseaux et le puits par des points, les tours par des segments, on élimine les contraintes (largeur des tours, du puits. . .).
Cette conception peut nous paraître évidente mais elle ne l'est pas forcément pour les élèves, cela peut faire l'objet du travail demandé.

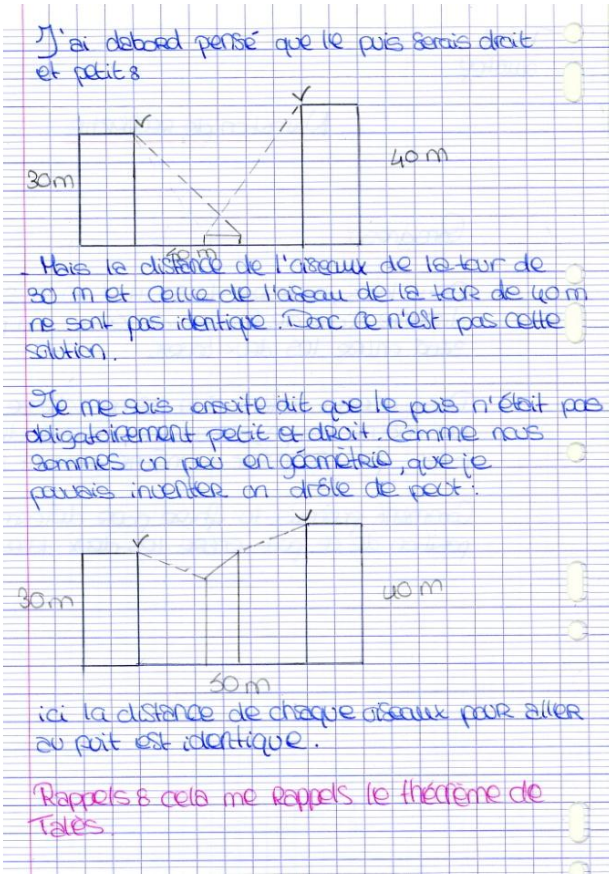



figure 1

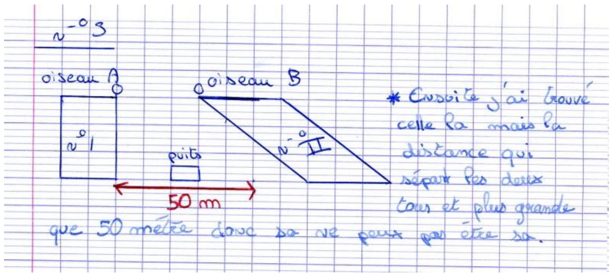



figure 2

Dans ces exemples, le puits a une ¡¡ épaisseur ¿¿. Il semble que le modèle s'adapte à la solution cherchée ; c'est particulièrement fort pour la figure 1 où la forme du puits est asymétrique.
Dans l'énoncé, aucune information n'est donnée sur la forme du puits, ce qui laisse libre toute interprétation sur celle-ci (et rend le problème plus ou moins difficile). Cela s'applique également à la forme des tours (la tour n°II de la figure 2 est peut-être celle de Pise, après tout Fibonacci est natif de cette ville...)
Ces modélisations permettent une interprétation géométrique. Il est possible pour les élèves d'en tirer une première approximation et éventuellement de mesurer. Des stratégies de mise à l'échelle sont alors possibles (il semble que c'est le cas dans la figure 1), mais on voit dans ce cas un autre modèle s'agréger, celui de la proportionnalité qui demande un effort supplémentaire d'intellectualisation du modèle (l'effort porte sur le passage de la verticalité-horizontalité où il suffit de ¡¡ compter ¿¿ à des lignes de direction différentes où le comptage n'est plus ¡¡ efficace ¿¿).

La taille et la forme du puits est donc tout à fait problématique, puisque l'énoncé n'exclut aucune éventualité. Une élève a imaginé un puits aussi haut que les deux tours, c'est un cas où le modèle s'adapte à une résolution a priori accessible (ici c'est un écart à la moyenne de la hauteur des tours), d'autre part la largeur du puits est, elle aussi, choisie avec le même concept d'écart à la moyenne (le ¡¡ centre ¿¿ du puits est à la même distance des deux tours).

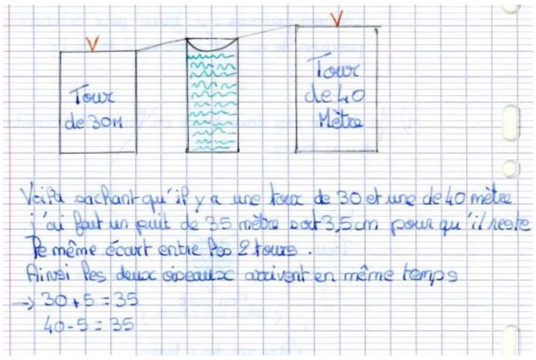



figure 3

— Trajectoire des oiseaux :
  Certains élèves n'ont pas envisagé une trajectoire rectiligne.

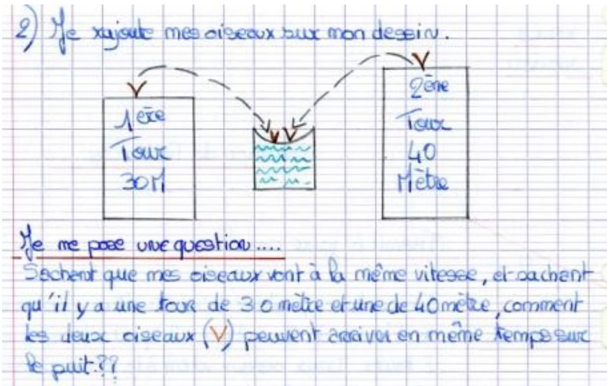



figure 4

La trajectoire des oiseaux est en général modélisé par une direction rectiligne, car elle facilite grandement les calculs.
L'élève sur la figure 4 a dessiné une trajectoire courbe, mais ne s'est pas aventuré dans cette voie pour la résolution du problème.

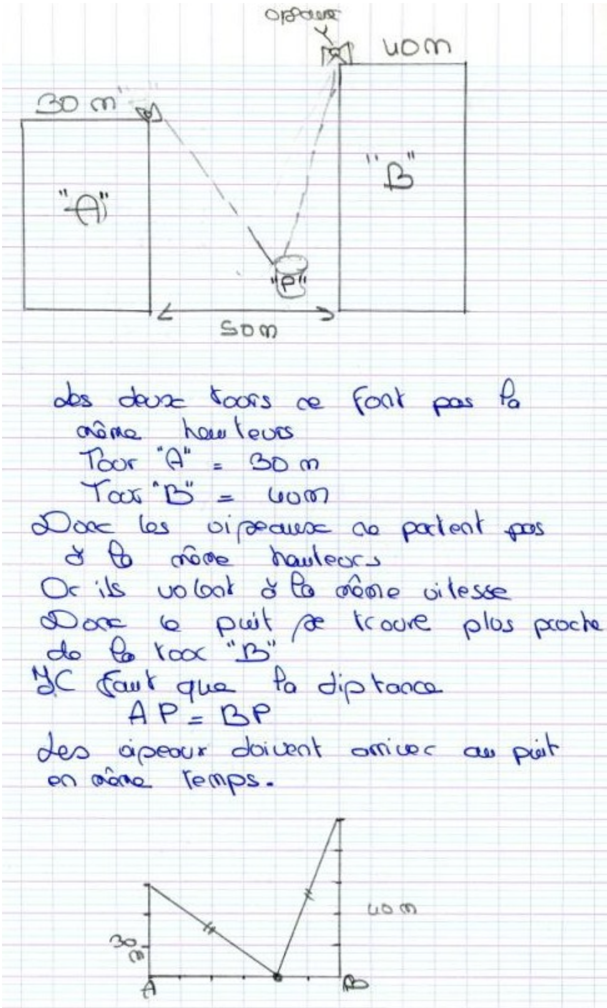



figure 5

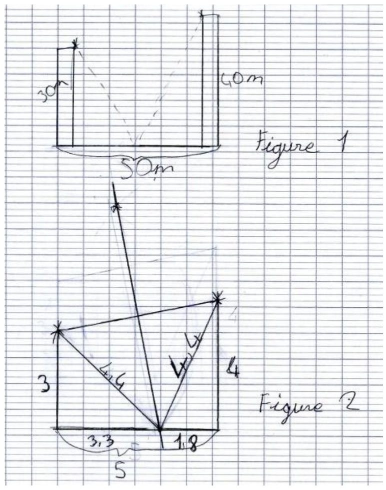



figure 6

Dans le travail de la figure 5, on voit le passage d'un modèle descriptif sur lequel il est difficile d'opérer à un modèle géométrique qui, de manière drastique, associe la forme du puits à un point et les tours à des segments perpendiculaires au sol. Le passage des tours nommées $A$ et $B$ aux points $A$ et $B$ dans la deuxième figure est particulièrement frappant.

D'autre part cette modélisation s'associe à une mise à l'échelle, permettant une double opérabilité (utiliser la géométrie euclidienne et ses figures ¡¡ classiques ¿¿ ainsi que la proportionnalité).

On peut l'observer aussi dans la figure 6 avec l'utilisation d'une médiatrice dans la deuxième figure.

Le choix de représenter le puits par un point est un passage d'abstraction très fort : au sens propre du terme on prend du ¡¡ recul ¿¿ sur la figure, comme si on s'éloignait du modèle pour ne retenir que les formes ¡¡ extrêmes ¿¿, un puits très éloigné ressemble à un point, une tour à un segment.

On peut faire remarquer aussi que les élèves ont choisi comme point de vue la géométrie du plan (on pourrait avoir un modèle dans l'espace). Le choix a toujours été fait par une vision latéral des tours (elles ne sont pas dessinées par une vue de dessus par exemple).

Ceci laisse penser qu'à l'instar des illustrations du moyen-âge, les types de modèle privilégiés par les élèves doivent permettre de laisser voir toutes les informations importantes (trajectoire des oiseaux, position relative du pied des deux tours).

Il faut toutefois nuancer ce propos, car la formulation du problème incite peut-être assez naturellement ce type de modélisation. On peut penser que, dans la résolution de problème, les élèves se heurtent à la formalisation trop précoce des modèles choisis (en général par l'enseignant) et à l'omission du passage d'un choix de modèle à un autre (les choix souvent implicites étant faits pour pouvoir rendre les modèles efficaces).