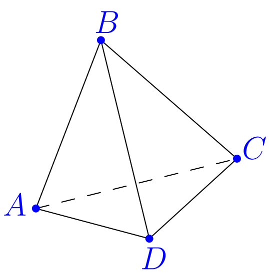
Table des matières

1 Énoncé du problème

Une fourmi peut rentrer ou sortir dans un piège par le point A. Quand elle est à un sommet, elle choisit au hasard une des trois arêtes qui passent par ce sommet. La fourmi est vivante si elle retourne au point A en ayant parcouru au plus 4 arêtes.



Sa chance de survie est-elle supérieur ou inférieure à une chance sur deux ?
Essaye d'estimer sa chance de survie.

Variante : On peut choisir un autre polyèdre sur lequel se déplacerait la fourmi.

2 Choix du problème

2.1 Compétences transversales

— Former les élèves à la pensée statistique et aux phénomènes aléatoires.
— Construire des outils de synthèse (tableaux, arbres, pourcentages, fréquences).
— Construire des outils de représentation (diagrammes et graphiques divers).
— Construire des caractères de position d'une série statistique (moyenne, médiane. . .).

2.2 Connaissances mathématiques

— Calculer des fréquences ou des pourcentages.
— Dénombrer.
— Calculer une probabilité.
— Utiliser la notion de fraction.

3 Analyse mathématique du problème

Première solution : L'univers est constitué de tous les chemins possibles que la fourmi peut parcourir ne dépassant pas quatre arêtes.

On nomme S l'évènement : "la fourmi survit à cette expérience c'est-à-dire la chaîne de sommets contient exactement un autre A".

Par exemple :

— $A - B - C - A$ est une chaîne pour laquelle la fourmi survit,

— $A - B - C - D - B$ est une chaîne pour laquelle la fourmi meurt.

On nomme A_i l'évènement : « la fourmi a parcouru i arête(s) », avec i un entier entre 1 et 4.

$P(S) = P(S \cap A_1) + P(S \cap A_2) + P(S \cap A_3) + P(S \cap A_4)$

Or $P(S \cap A_1) = 0$ car en partant de A, la fourmi ne peut pas revenir sur A.

$P(S \cap A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

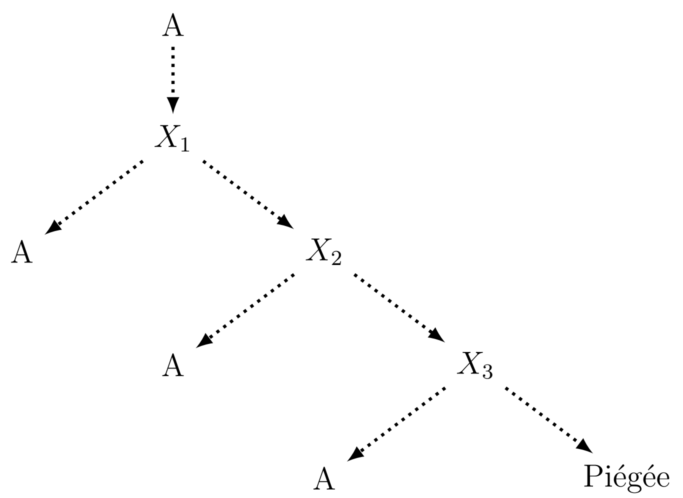
$P(S \cap A_3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

$P(S \cap A_4) = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$

Donc $P(S) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{19}{27}$

Attention à ne pas se restreindre à un arbre où les branches s'arrêtent dès qu'on obtient le sommet A !

Deuxième solution : On considère l'évènement contraire à S.



Nous avons donc $P(\overline{S}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

car on a deux chances sur trois de ne pas se retrouver en A quand on est au nœud X_i.

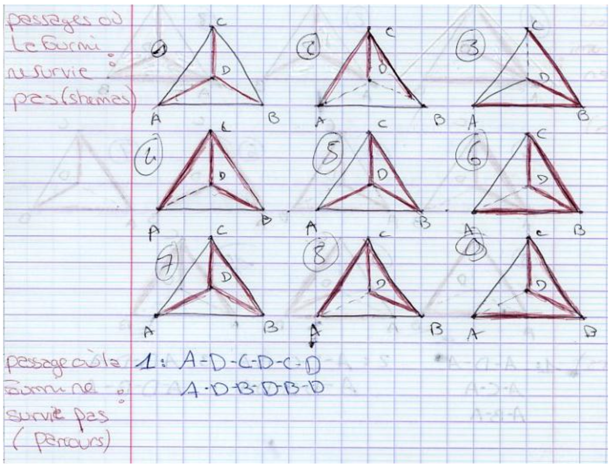
4 Analyse de productions

Cette recherche peut étonner les élèves par son caractère peu conventionnel. Elle permet de mettre en œuvre des discussions riches entre les élèves, en particulier sur le mot « chance ».

Des élèves donnent à la fourmi une intelligence suffisante pour sortir du piège, privant ainsi la promenade de son caractère purement aléatoire.

On peut observer les stratégies suivantes :

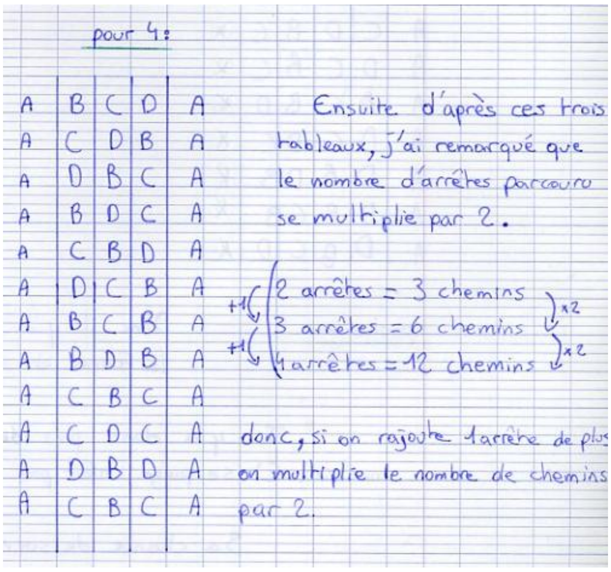
— L'utilisation de schémas permet de débuter la recherche avec notamment l'écriture de chaînes de lettres.



Pour faciliter le dénombrement, celles-ci peuvent être ordonnées :

$$A - B - C - D - A$$
$$A - B - C - D - B$$
$$A - B - C - D - C$$
$$\dots$$

Certains élèves s'interrogent sur le calcul du nombre de permutations de trois lettres ou sur celui du nombre de chemins en fonction du nombre d'arêtes.



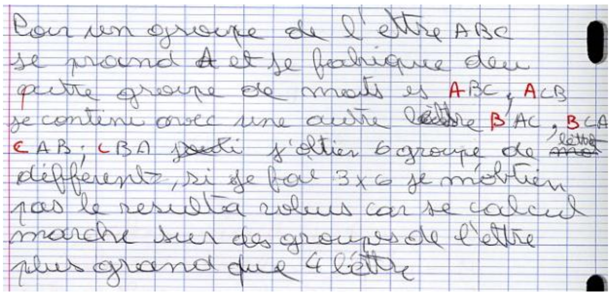
pour 4 :

A	B	C	D	A
A	C	D	B	A
A	D	B	C	A
A	B	D	C	A
A	C	B	D	A
A	D	C	B	A
A	B	C	B	A
A	B	D	B	A
A	C	B	C	A
A	C	D	C	A
A	D	B	D	A
A	C	B	C	A

Ensuite d'après ces trois tableaux, j'ai remarqué que le nombre d'arrêtes parcouru se multiplie par 2.

$+1$ 2 arrêtes = 3 chemins $\times 2$
$+1$ 3 arrêtes = 6 chemins $\times 2$
4 arrêtes = 12 chemins

donc, si on rajoute 1 arrête de plus on multiplie le nombre de chemins par 2.



Pour un groupe de l'ettre ABC je prend ~~A~~ et je fabrique deu petre groupe de mots es ABC, ACB je contine avec une autre lettre BAC, BCA CAB ; CBA ~~porti~~ j'ottien 6 groupe de ~~mot~~ lettre différents, si je fai 3×6 je n'obtien pas le resulta volus car se calcul marche sur des groupes de l'ettre plus grand que 4 lettre

— Dans l'expérience, il n'a pas été observé d'arbres, toutefois cela peut nourrir un point du compte-rendu.

— Certains élèves ont l'intuition de l'équiprobabilité des chemins.
Ils calculent le rapport de tous les chemins « vivants »sur tous les chemins possibles avec les erreurs que cela implique.
Par exemple, pour les chemins constitués de quatre arêtes, $A-B-A$ correspond en réalité à neuf chemins ($A-B-A-B-A$; $A-B-A-B-C$; $A-B-A-B-D$; $A-B-A-C-A\ldots$).

Question Estimer si sa chance de survie est supérieur ~~a~~ à 1 sur 2 ?

Avec le groupe pour savoir si sa chance de survie est supérieur à 1 sur 2 on a cherché tous les chemins où la fourmis vit et là où elle meurs. Voirs sur brouillons
On a trouver 15 où elle vit et 12 où elle meurs.
Puis après on additionne les 2 nombres
15 + 12 = 27

Calcul
15 + 12 = 27

Ensuite on va le mettre sous forme de fraction
On prend 27 = dénominateurs et 15 = numérateur
Donc = $\frac{15}{27}$
Conclusion
Oui sa chance de survie est suppérieur à 1 sur 2 car sa chance de survie est de $\frac{15}{27}$ chance de survie environ.

on obtiendrait alors le nombre de chemins dans la figure puit on placerait les résulta obtenu sous forme de fraction. Ce qui nous donnerait le nombre de chance sur un nombres de chemin ex :

$x + y = B$; $\frac{x}{B}$

La fourmi a x chance ~~sur~~ sur B de survivre

x = nombre de chemin valide
y = nombre de chemin invalide
B = nombre de chemin valide et invalide