Table des matières

1 Un énoncé

Vous disposez d'un cube de 10 cm d'arête et vous désignez par A un de ses sommets.
Déterminez tous les points du cube situés à 15 cm de A.

2 Choix du problème

2.1 Compétences transversales

— Modéliser une situation.
— Interroger différentes représentations d'objets de l'espace.
— Faire des essais et les relier à des concepts géométriques.

2.2 Connaissances mathématiques

— Utiliser le théorème de Pythagore pour le calcul de distances dans le cube.
— passer d'une représentation du cube à une autre,
— repérer des qualités et des inconvénients de chaque représentation.
— Raisonner par l'absurde pour montrer que certaines faces ne contiennent aucun point à 15 cm du sommet.

3 Analyse mathématique

On peut observer que cela revient à déterminer l'intersection d'une sphère de 15 cm de rayon et d'un cube de 10 cm d'arête.
Une première approche algébrique consisterait à donner l'équation d'une sphère dans un repère d'origine A, dont les vecteurs seraient donnés par la direction des arêtes du cube.
On aurait pour la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 15^2$$

Les plans associés aux faces du cube sont au nombre de 6 et ont pour équation :

$$x = 0\,;\ y = 0\,;\ z = 0\,;\ x = 10\,;\ y = 10\,;\ z = 10$$

Dans les trois premiers plans (adjacents au sommet A), la section est un cercle de rayon 15 cm d'équation :

$$x^2 + y^2 = 15^2$$

(pour le plan d'équation $z = 0$), or la distance maximale sur une face adjacente au point A est de

$$\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} < 15$$

donc aucun point de ces cercles n'appartient aux faces adjacentes du cube.

Pour les trois autres plans (par symétrie il suffit de travailler sur l'un d'entre eux) :
la section de la sphère avec le plan d'équation $z = 10$ est un cercle de rayon 15cm d'équation :

$$x^2 + y^2 + 10^2 = 15^2$$

c'est-à-dire par substitution

$$x^2 + y^2 = 125$$

C'est un cercle de centre A' de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,10)$ et de rayon $\sqrt{125}$. Par symétrie on obtient la figure donnée ci-dessous :

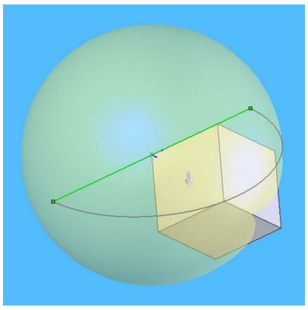


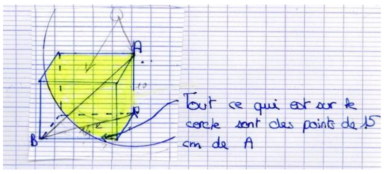
image réalisée par Yann DI MAURO, professeur de technologie

4 Analyse de productions

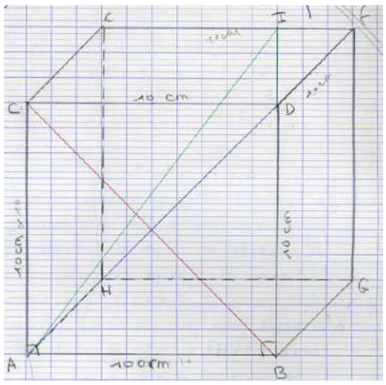
Les stratégies observées :

Avec la perspective cavalière :

De nombreux élèves utilisent la représentation en perspective.
Parfois les distances sont mesurées sur le dessin sans prendre en compte le fait que cette représentation modifie les distances, on peut voir ainsi des arcs de cercles de rayon 15 cm tracés.

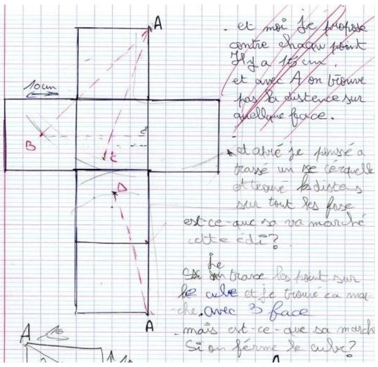


Des discussions peuvent émerger à propos d'intersections inexistantes mais qui apparaissent sur la représentation, en particulier entre une arête du cube et sa grande diagonale. Pour cet élève l'arête $[BD]$ coupe l'arête $[CG]$ en I, il en déduira plus tard que ABI est un triangle rectangle en B et calculera ainsi des longueurs de segments inexistants.
Parfois ce type de représentation induit une recherche de distance en parcourant uniquement les arêtes ou en restant sur les faces du cube en considérant des lignes brisées.



Avec un patron :

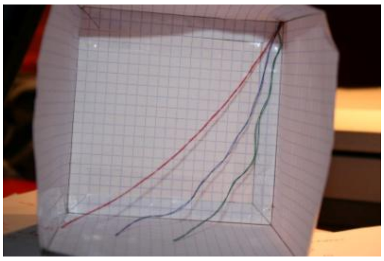
On trouve le même type de démarche sur la représentation en patron. Beaucoup d'élèves tracent des arcs de cercles (quitte à réduire leurs patrons). Cette représentation permet d'investir plus facilement le carré et en particulier le calcul d'une diagonale d'une face. Dans le brouillon de cet élève (ENAF : élève nouvellement arrivé en France), on retrouve cette idée et l'élève perçoit ici qu'en refermant le patron la propriété vraie sur le patron est perdue pour le cube.



Avec une maquette :

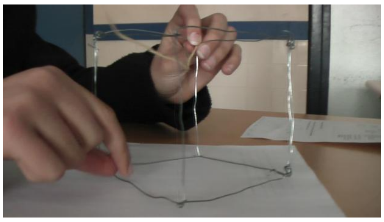
Les types de maquette peuvent être complètement fermées. Certains élèves, avec l'aide de fil de fer de longueur 15 cm, pénètrent le cube. Ce type de démarche empêche les élèves de trouver des points candidats, toutefois elle permet de pressentir des impossibilités, en particulier les points ne peuvent être sur des faces adjacentes du point A.

On voit aussi des élèves ouvrir leurs maquettes.



Certains élèves utilisent du fil de fer et créent ainsi une maquette complètement ¡¡ ouverte ¿¿.

Cet élève a réalisé avec son groupe un cube en ¡¡ fil de fer ¿¿.



Le calcul de la grande diagonale est tout à fait correct, mais pour trouver des points à 15 cm, il ¡¡ diminue ¿¿ la distance en cherchant deux points J et I sur les arêtes. Ainsi, implicitement, le plus grand côté du triangle est la somme des deux autres.