ministère
éducation
nationale

ÉduSCOL
[dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Formation continue
Publications

Actes de l'université d'été

Expérimentation et démarches d'investigation en mathématiques

La dimension expérimentale au coeur des problèmes de recherche en mathématiques

Saint Four du 20 au 24 août 2007

octobre 2008

eduscol.education.fr/forensactes

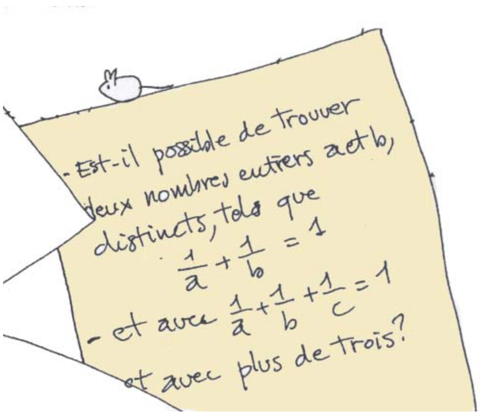
La dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques

Mizony Michel
Maître de Conférences
à l'université Lyon 1,
IREM de Lyon

I. Préambule

Cet atelier a été conçu en complément de la conférence « La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques » effectuée par Gilles Aldon. En utilisant d'une part la méthode des « problèmes ouverts» et d'autre part un exemple de problème, celui des fractions égyptiennes, l'atelier a eu pour but d'essayer de cerner ce que les participants pouvaient dire sur leur propre démarche d'expérimentation lors de cette activité. Celle-ci s'est déroulée en deux temps, la première mi-temps consacrée à la recherche sur ce problème en petits groupes, la deuxième mi-temps en un partage du type « débat scientifique » pour faire émerger ce qui relevait de la dimension expérimentale en mathématiques. Plutôt que de rapporter les productions des deux ateliers, certes très intéressantes sur les résultats partiels et conjectures émises à propos des fractions égyptiennes, mais qui nous ont montré à quel point il est délicat de parler sur sa propre démarche expérimentale, il me semble souhaitable de donner des éléments, sur ce problème précis, éléments élaborés par le groupe de recherche EXPRIME (cf. ci-après).
Michel M.

Le problème posé lors de l'atelier



II. Document de synthèse sur le problème des fractions égyptiennes

A. Introduction et objectifs

Ce document est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LIRDHIST. La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant : En quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux).

L'ensemble des ressources sur ce thème sera à terme disponible sur le site educmath de l'INRP, http://educmath.inrp.fr/Educmath, et il sera possible par une navigation simple d'approfondir et de prolonger de très nombreuses notions abordées. Seront à disposition : des textes théoriques sur la dimension expérimentales en mathématiques, des ressources concernant le problème ouvert, des textes similaires à celui présenté ici mais concernant d'autres situations mathématiques, des approfondissements concernant cette situation ...

Concernant ce document, son objectif premier est de faciliter la mise en œuvre d'un problème particulièrement riche en mettant en particulier en évidence ses potentialités et celles qu'il dévoile chez les élèves. Dans ce but, nous proposons une vue de l'ensemble des objets mathématiques que l'on peut espérer travailler lors de la mise en œuvre de ce problème dit ici des «fractions égyptiennes». Cette vue a pu être obtenue par une analyse approfondie s'appuyant sur de nombreuses expérimentations à tous les niveaux du collège et du lycée. Cette situation peut irriguer plusieurs séances de mathématiques et ses prolongements permettre encore de nombreuses heures de découvertes mathématiques.

B. Situation mathématique et mise en œuvre

La situation considérée est liée à l'énoncé ci-dessous :

Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Continue …

Sans trop approfondir pour l'instant, il est clair que ce problème est pour la plupart de nos élèves un problème de recherche. Avant de parler de sa mise en œuvre, donnons tout d'abord quelques éléments de solution :

Pour tout $b > 1$, $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ équivaut à $a = b/(b-1) = 1 + 1/(b-1)$. $b = 2$ donne $a = 2$ ce qui ne convient pas et tout autre entier b ne convient pas.
La réponse à la première question est donc « non, il n'existe pas deux tels entiers »

La réponse à la deuxième question est oui, avec une unique solution : (2,3,6).

La réponse aux questions suivantes est ensuite toujours oui avec 6 puis 72 puis 2320 puis 245765 puis 151182379 solutions avec des entiers tous distincts. Voici par exemple des n-uplets solutions à différents rangs : (2,3,10,15); (2,3,7,42); (2,4,5,6,20); (2,5,6,10,30); (2,3,7,43,1806); ... .

Ces éléments étant donnés, donnons des pistes de mise en œuvre envisageables.

Pour la première séance de 55 minutes, le début de scénario peut-être le suivant :

Les élèves se sont installés par groupe de 4 ou 5 Ils font face au professeur	Le professeur Les élèves	Présente le type d'activité écoutent et prennent connaissance du type d'activité		2 min
Les élèves font	Le professeur	Présente le problème et précise les outils disponibles	Énoncé sur	2 min

face au professeur	Les élèves	écoutent et prennent connaissance du problème	transparent	
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Vérifie l'appropriation de la consigne en en demandant une reformulation Un reformule sur la demande du professeur Les autres écoutent	Énoncé sur transparent	3 min
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Gère des débats permettant de répondre à des questions du type : Qu'est qu'un entier naturel ? que veut dire 1/a ? Posent éventuellement des questions puis débattent	Énoncé sur transparent	5 min éventu-ellement
Les élèves sont en groupe de travail	Le professeur Les élèves	Donne le départ de la recherche Débutent la recherche	Papier Crayon Calculatrice ?	
Les élèves sont en groupe de travail	Le professeur Les élèves	Reste à distance puis circule pour prendre de l'information sans intervenir lorsque les élèves sont absorbés par leur recherche Cherchent	Papier Crayon Calculatrice ?	

Se posent ici plusieurs questions importantes : De quel matériel vont disposer les élèves ? Comment gère-t-on le cas $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$? Propose-t-on l'énoncé donné plus haut dans son intégralité ou morceau par morceau ou ... ?

- Comme on peut le voir plus loin, l'utilisation ou non de la calculatrice diversifie les procédures des élèves. Il est donc important de prévoir cet aspect matériel en fonction des objets mathématiques que l'on souhaite le plus voir émerger.

- A l'issue de plusieurs expérimentations, on peut constater que le cas $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est difficile pour de nombreux élèves et donc délicat à gérer.
  Nous proposons donc deux scénarii différents suivant les niveaux de classe.
  - ✗ Pour un travail en collège et pour des classes de seconde peu à l'aise on pourra faire une première mise en commun après environ 10 à 15minutes de recherche. Cette mise en commun aura pour but de faire le point sur les premières approches du cas difficile et donc de relancer par un débat une recherche qui s'enlise.
  - ✗ Pour un travail avec de bonnes classes de seconde et d'autres classes de lycée, une prise d'information par le professeur circulant dans les rangs en début de recherche devrait suffire pour vérifier que l'étude de ce cas ne bloque pas l'avancée des travaux.

- Il semble difficile de morceler l'énoncé sans changer la nature du problème et en particulier sans risquer de fermer ce problème sur la question 1. On préférera donc une gestion différenciée comme proposée ci-dessus.

Suivant les niveaux de classe et l'approfondissement attendu, la recherche se prolongera plus ou moins. Une première mise en commun, à partir de productions d'élève sur transparents ou affiches, ou directement lors d'un débat doit se dérouler en fin de première séance. Elle permet de faire le point rapidement sur les résultats obtenus (ou sur une partie seulement) en vue d'un développement lors de la deuxième séquence.

Le professeur recueille les productions qu'il va pouvoir analyser entre les deux séances. On peut utilement demander aux élèves de rédiger un compte rendu de recherche pour le prochaine séance.
Lors de celle-ci, en s'appuyant sur les productions d'élèves, le professeur prolonge le débat et met en avant les résultats, propriétés ... qu'il souhaite mettre en évidence ou institutionnaliser.

C. Objets mathématiques susceptibles d'être travaillés

Comme cela a été rapidement évoqué plus haut, ce problème est un problème de recherche. La mise en œuvre proposée est bien entendue liée à une attitude attendue des élèves et à une volonté du professeur de la faire vivre. Elle permet de travailler de nombreuses compétences.

Nous ne développerons pas ici d'analyse sur les compétences liées à l'activité de résolution de problème proprement dite (savoir mettre en œuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes, changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la démonstration, de la preuve ...). On renverra le lecteur intéressé à des ouvrages comme celui de Gilbert Arsac, Gilles Germain, Michel Mante sur le problème ouvert.

L'objectif ici est de proposer une liste d'objets, de propriétés, de raisonnements mathématiques que l'on sait susceptibles d'être mis en œuvre lors d'une telle activité. Tous les éléments de cette liste ont été observés lors d'expérimentations dans de « vraies » classes, dans des conditions de fonctionnement habituel.
Cette présentation doit permettre d'aider le professeur à prévoir et repérer les apparitions de points intéressants dans le contexte de la recherche en classe et d'aider à préparer les mises en commun et synthèses avec les élèves.

La présentation utilise des extraits de productions d'élèves ou des questionnements qui se sont faits jour lors des recherches :

Plutôt en collège ...

Inverse de 0 ?

- " $1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car 0 c'est rien "
- " $1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car 1/0 ça n'existe pas "

Ecriture décimale d'un rationnel, nombre décimal

- Que faire d'écritures décimales obtenues à la main ? Quelles opérations sur les écritures décimales ? Qu'est-ce qu'une écriture décimale ?
- Comparaison de travaux sur les décimaux et sur les écritures décimales ? Quelle différence dans les manipulations ? Qu'est-ce qu'une approximation d'un réel ?
- "Sachant que 0,3 + 0,2 + 0,5 = 1, est-ce que 1/3 + 1/5 + 1/2 = 1 ? A-t-on 1/3 = 0,3 ? "
- Qu'est-ce qu'on obtient avec la calculatrice ? Quelle approximation avec la calculatrice?
- ...

Somme de rationnels

- "A-t-on 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1 ? (La calculatrice affichant 0,9999...). Comment le prouver ?"
- Puis un travail de preuve : comment prouver avec les fractions ?

Vers une perception de l'égalité comme équivalence

- " Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens 1/4 + 1/6 + 1/12 = 0,5 d'où une solution au rang supérieur "
-

Cadre géométrique : une perception de découpages possibles du segment [0;1]

- " 1 = 1/2 + 1/2 or 1/2 est la plus grande fraction de [0;1] différente de 1, donc je ne peux remplacer le deuxième 1/2 par une autre fraction qui convienne "
- La réalisation de croquis peut permettre de visualiser : 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1.

Décroissance de x → 1/x en acte
"Ce n'est pas possible d'obtenir 1 avec deux naturels distincts, car en ajoutant les deux plus grands résultats, on n'obtiendra que 1/2 + 1/3 = 0,833 ...
car 1 : 2 = 0,5 et 1:3 = 0,333 ... ".

Possibilité de travailler les compétences en logique avant le symbolisme :
- 1 = 1 donc ...
- 1/3 ≠ 1 donc

Plutôt en lycée ...

Inverse de O ?

Somme et différence de rationnels
- "A-t-on 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1 ? (La calculatrice affichant 0,9999...). Comment le prouver ?"
- Transformation de 1 = $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- 1 – 1/2 = 1/2 ; 1/2 – 1/3 = 1/6 ; ..... ; 1 – 1/2– 1/3 = 1/6 !

Décroissance de x 1/x
- soit en acte comme au collège
- soit lors de l'étude de a = 1 + 1/(b-1).

Cadre plus géométrique : une perception de découpages possibles du segment [0;1]

Vers une perception de l'égalité comme équivalence
" 1 = $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est équivalent à ab = a + b ou à ab = 1 + 1 ? "
" Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens 1/4 + 1/6 + 1/12 = 0,5 d'où une solution au rang supérieur "

Essais successifs, adéquation des valeurs de deux fonctions. Cet aspect est mis particulièrement mis en évidence lors de tests sur des expressions de la forme
- 1/a = 1 – 1/b
- a + b = ab

- ✗ Pour la somme de quatre inverse un élève prend d = 2 et teste $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$
- ✗ ab + ac + bc = abc
- ✗ ...

Travail en logique

- ✗ Raisonnement par l'absurde : 1/2 $\neq$ 1/3 donc ...
- ✗ impasse a = f(b) ; b=f $^{-1}$(a) ; a =f(f $^{-1}$(a)) = a

- ✗ exemples et contre exemple pour les problèmes existentiels
  " Que dire aux élèves qui recherche un contre-exemple pour montrer que a + b ≠ ab ? "

Conception concernant la recherche
" Un « algorithme » existe pour les cas deux et trois donc doit exister pour le cas 1."
" Inutile de passer au cas 2 si on n'a pas trouvé pour le cas 1"
Compétence travaillée : les phénomènes mathématiques ne sont pas uniformes.

Remarque 1: En lycée, un démarrage sans calculatrice et une utilisation rapide de l'algèbre amènent parfois à des blocages en ce qui concerne le problème. Les productions montrent bien évidemment un travail certain des élèves sur ces notions non encore naturalisées. Une mise en commun pour prolonger ces travaux permet de travailler les transformations d'égalité, l'utilité de mettre en œuvre des essais et de tester l'adéquation des valeurs de deux fonctions ici de deux ou trois variables ... Cette piste n'est donc pas à laisser de côté.

Remarque 2: Ont été présentées ci-dessus les pistes les plus fréquentes. De très nombreuses autres sont certainement envisageables suivant le contexte (travail sur les propriétés de divisibilité en arithmétique, utilisation de l'équation du second degré pour déterminer a et b de somme égal au produit avec une généralisation éventuelle ...). En cherchant vous en trouverez sans doute bien d'autres.

C. Liens vers quelques développements

Nous proposons ci-dessous quelques documents à «l'état brut » qui peuvent vous permettre de prolonger la recherche. Des liens plus détaillés vers des pages ou des sites concernant ce problème et plus généralement les fractions égyptiennes seront proposés sur le site éducmath où la version définitive des ressources sera proposée.

Des pistes concernant l'obtention de toutes les solutions

Programme d'exploration (somme de quatre termes) :

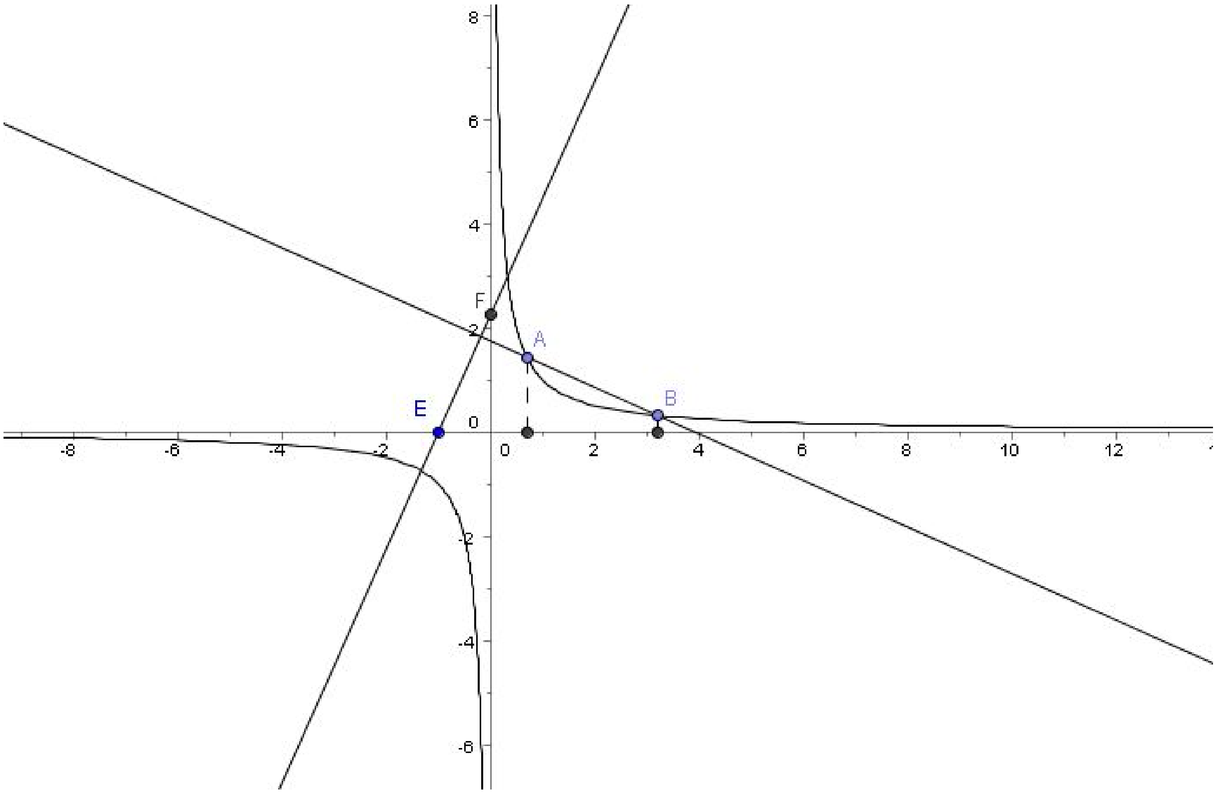
```
n :=0 : liste :=NULL :
for i from 1 to 4 do
for j from i to 6 do
for k from j to 12 do
for l from k to 42 do
r :=1/i+1/j+1/k+1/l :
if r=1 then n :=n+1 : liste := liste , [i,j,k,l] :
fi
od :od :od :od :
n ; liste ;
```

Si : 1/2 + 1/3 + ... + 1/k = 1, alors1/2 + 1/3 + ... + 1/(k + 1) < 1 et

1 − (1/2 + 1/3 + ... + 1/(k + 1)) = 1/k1/(k + 1) = 1/k(k + 1).
Ceci donne le dénominateur des plus petites fractions susceptibles d'intervenir dans une décomposition de 1 : au rang 1 → 2, au rang 3 → 6, au rang 4 → 42, au rang 5 → 1806, au rang 6 → 3263442, et limite ainsi la zone d'exploration.

Fractions égyptiennes et hyperbole

Une association intéressante et accessible à certains de nos élèves :
Les points A et B appartiennent à la courbe d'équation : xy = 1.
Le point E a comme coordonnées : (−1, 0)
La droite (EF) est perpendiculaire à la droite (AB)
L'ordonnée de F est le produit des abscisses de A et de B.
L'ordonnée à « l'origine » de (AB) est : 1/a +1/b.



Fractions égyptiennes et pavages

Un pavage sera dit archimédien si ses pièces sont constituées de plusieurs sortes de polygones réguliers, et que tous ses sommets sont identiques.
Dès lors autour d'un nœud d'un tel pavage on a la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

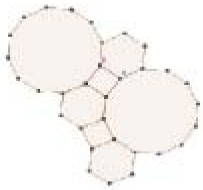
où k est le nombre de polygones et donc de secteurs angulaires autour d'un nœud et où a_i est la mesure en radian d'un des i secteurs.
Si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i, on a alors :
$a_i = \frac{n_i - 2}{n_i}\pi = (1 - \frac{2}{n_i})\pi$, et donc la relation précédente devient :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

Pour k = 3, on obtient :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2},$$

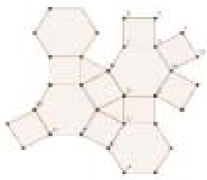
qui donne des solutions : (4,8,8) , (4,6,12) ,... Ce qui donne des pavages avec des carrés et des octogones, ou, avec des carrés, des hexagones et des dodécagones. Par exemple :



Pour k = 4, on obtient :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1,$$

qui donne d'autres pavages archimédiens possibles, dont le suivant :



Fractions égyptiennes, nombres abondants et nombres de Carmichael

Prenons une décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes distinctes :

$$1=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k},$$

alors N = ppcm(n1, n2, ... , nk) est abondant ou parfait (i.e. la somme de ses diviseurs propres est supérieure ou égale à N) ; plus précisément il est presque parfait (i.e. somme de certains de ses diviseurs). En effet on a :

$$N=\frac{N}{n_1}+\frac{N}{n_2}+\ldots+\frac{N}{n_k},$$

ainsi pour toute décomposition de 1 en somme de fractions égyptiennes, le ppcm des dénominateurs est un nombre presque-parfait ; inversement à tout nombre presque-parfait on associe canoniquement un ensemble de décompositions de 1 en somme de fractions égyptiennes, cet ensemble comprenant une décomposition dont le ppcm des dénominateurs est le nombre presque-parfait de départ.

Il existe également un lien entre décompositions de l'unité en somme de fractions égyptiennes distinctes et nombres de Carmichael (i.e. nombres qui vérifient le petit théorème de Fermat, mais qui ne sont pas premiers), ce lien fait l'objet de recherches actuelles en arithmétique. Le problème des fractions égyptiennes est un problème ouvert.

Bibliographie

Pratique du problème ouvert : version totalement remise à neuf par G. Arsac et M. Mante, coédition IREM-CRDP, Octobre 2007.

Adresses de sites internet

Equipe EXPRIME : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/dim_expe/
La feuille à problèmes : http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/
L'encyclopédie des suites : http://www.research.att.com/~njas/sequences/