La dimension expérimentale en mathématiques
Enjeux épistémologiques et didactiques[1]

Viviane Durand-Guerrier,
Université de Lyon, Université Lyon 1
IUFM de Lyon et LEPS – LIRDHIST, EA 4148

Les interactions mutuelles entre études épistémologiques et didactiques sont anciennes, comme en témoigne une littérature nombreuse (Arsac 1987, Artigue 1991, Dorier 2000). On pourrait à bon droit se demander pourquoi s'interroger à nouveau sur ces questions aujourd'hui. Une des motivations pour le faire est l'émergence, ou plutôt la ré-émergence aujourd'hui d'un questionnement sur la dimension expérimentale des mathématiques, et même plus précisément sur le rôle de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques (Chevallard, 2004 ; Dias, 2005 ; Dias & Durand-Guerrier, 2005 ; Perrin, 2007; Durand-Guerrier, 2007). Ceci a donné lieu, dans le cadre du développement du site Educmath, à une étude coordonnée par Gérard Kuntz dont la première version est actuellement en ligne[2]. Un colloque intitulé *Mathématiques, Sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire* a été organisé par La Main à la Pâte à Saint-Étienne en septembre 2005[3]. Enfin, le XXXème colloque de la Copirelem qui s'est tenu en juin 2006 avait pour thème *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?*[4]

Dans une première partie, je me propose de mettre en lumière les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques. Dans une deuxième partie, j'illustrerai mon propos à partir d'un exemple, riche d'enseignement, emprunté à Gustavo Barallobres (Barallobres, 2007, Barallobres et Giroux, 2008).

1) QUELQUES ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

1.1.Caractéristiques d'un milieu permettant le recours à la dimension expérimentale en mathématiques

Nous entendons par milieu ce que le professeur doit mettre en place pour permettre l'apprentissage mathématique : objets matériels ou non, état des connaissances, documents et supports de nature variée, organisation des interactions etc. Le concept de milieu a été introduit par Guy Brousseau et retravaillé par de nombreux auteurs. On pourra se reporter aux communications consacrées à *la notion de milieu* dans les actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques (Dorier &al., 2002, pp109-206).

Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. L'organisation par le professeur d'un milieu permettant de favoriser le recours à l'expérience est une tâche complexe et exigeante. Un tel milieu doit être nourri par la connaissance a priori, pour le professeur, de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs en jeu dans la situation. Il doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaborations d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés etc…) permettant de mettre en

[1] Ce texte est très largement repris de la première partie de Durand-Guerrier, 2006
[2] http://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/experimentation-math

[3] Le compte-rendu du colloque est en ligne sur le site de La main à la pâte http://www.lamap.fr/bdd_image/144_CR_Colloque.pdf
[4] Pour la présentation et le programme du colloque : http://www.copirelem.free.fr/

œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. Il faut enfin qu'il permette la médiation entre sujets et objets et favorise l'articulation entre les aspects sémantiques, syntaxiques et pragmatiques[5] qui sont mobilisés pour l'élaboration de conjectures puis de preuves.

1.2. Une situation paradigmatique : le puzzle (Guy Brousseau, 1998)

Un exemple classique permet d'illustrer les points précédents. Il s'agit de la situation du Puzzle (Brousseau, 1998, p.237-241). Il s'agit d'agrandir un puzzle, dont on a un modèle, de sorte qu'un côté qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur le puzzle agrandi. Les élèves travaillent par groupe de cinq, chaque groupe se met d'accord sur la manière d'agrandir les pièces, puis chaque élève va agrandir la pièce dont il a la responsabilité. Les élèves se retrouvent et rassemblent les pièces agrandies pour reconstituer le puzzle. Dans la plupart des cas, les élèves de la fin de l'école primaire sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle. La *réalité*[6] résiste ; elle disqualifie le modèle additif. Il faut donc faire d'autres conjectures et mettre en œuvre de nouvelles actions pour tester ces conjectures. Dans cette situation, la question de l'agrandissement renvoie à plusieurs aspects : la conservation de la forme qui relève de l'*aspect perceptif ;* la conservation des angles, qui relève de l'*aspect* géométrique et la proportionnalité des mesures de longueurs qui relève de l'*aspect numérique*. Les liens sont étroits avec le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes. Suivant la nature du milieu constitué par le professeur, on peut voir apparaître des méthodes géométriques, ou des méthodes numériques, voir des méthodes combinant les deux.

2) UN EXEMPLE RICHE D'ENSEIGNEMENT

La situation décrite ci-dessous est présentée et analysée dans Barallobres, 2007 et Barallobres & Giroux, 2008). Elle intéresse notre propos car elle met en évidence l'importance de la nature des expériences des élèves non seulement dans les phases d'action de la situation, mais aussi dans les phases de formulation, de validation et dans le processus de conceptualisation.

2.1. Présentation de la situation, méthodes et validation

Le problème proposé aux élèves est le suivant : Trouver la somme de dix nombres entiers consécutifs. Les élèves travaillent en équipe de 4 ou 5 (élèves de 13 ans). La situation comporte plusieurs étapes. Dans la première étape, celui qui trouve la somme a gagné. Le professeur propose successivement deux suites de nombres : <u>19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28</u> et <u>783, 784, 785, 786, 787 788 789 790,791, 792</u>. Dans la deuxième étape, les élèves sont invités à réfléchir pour trouver une méthode permettant de trouver la somme le plus vite possible, et ce quels que soient les nombres proposés par le professeur, puis à reprendre le jeu avec des nombres de plus en plus grands. La troisième étape est consacrée à la recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toutes séries de dix nombres naturels consécutifs. On termine par le bilan des méthodes et la présentation du travail de chaque équipe.

Lors de l'une des mises en œuvre de cette situation, deux méthodes sont reconnues comme les plus efficaces. La première est celle qui donne origine à la formule $10n+45$ et qui est acceptée par la majorité de la classe ; elle utilise la décomposition 19, 19+1, 19+2, 19+3, …. 19+9. L'origine de 45 pose cependant problème. La deuxième méthode a été produite par un seul groupe. Elle consiste à ajouter 5 à droite du cinquième nombre de la liste. Pour la série1 qui commence par 19, on obtient 235, qui est bien le résultat correct. Le groupe qui a produit cette méthode déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus. Du point de vue des auteurs, et c'est un point de vue que l'on est enclin à partager, le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode est a priori plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode. Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable,

---

[5] Les définitions que nous adoptons sont reprises de Eco (1980) : les aspects sémantiques correspondent à ce à quoi réfèrent les signes ; les aspects syntaxiques concernent les règles de combinaison des séquences dans lesquelles les signes sont insérés, tandis que les aspects pragmatiques renvoient aux origines des signes, à leurs effets sur les destinataires, et aux usages qui en sont fait.

[6] Au sens ici des objets du monde sensible.

sur la série qui commence par *15* (résultat *195*), de faire très rapidement le lien entre sa méthode et la première méthode, alors que manifestement, les autres élèves ne comprennent pas.

« E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « *4* » ajouté, parce que la première méthode est « fois *10* » et après plus *45*.

Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler le premier nombre ×10 + 45, dans notre exemple : 15×10+45

E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».

2.2. Différents types d'actions possibles

L'interprétation, par les auteurs, du phénomène observé concerne un travail de l'élève sur les signes en référence à Peirce. Celle que je propose ici est différente et dans une certaine mesure complémentaire. Elle s'appuie sur l'inventaire de différents types d'actions que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (action sur des objets familiers avec des techniques disponibles) d'une part, et sur des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire d'autre part. En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Un premier type d'action consiste à *poser l'addition en colonne.* Si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul *montre* que : le résultat se termine toujours par 5 ; l'on a toujours une retenue de 4 ; la somme des chiffres des dizaines est égale au premier nombre de la liste ; le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre. Même s'il est évident que rien ne garantit que ces régularités soient observées par les élèves mettant en œuvre cette manière de faire, on peut quand même considérer qu'elle est susceptible de créer un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes.

Un deuxième type d'action consiste à *faire des regroupements en utilisant les compléments à 10*, comme dans les exemples suivants :

<u>15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24</u>

16+24 = 40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

Il reste 15 et 20 ;   4×40 + (20 + 15) = 160 + 35

- <u>16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25</u>

16 + 24 =40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

Il reste 20 et 25 ;   4×40 + (20 + 25) = 160 + 45

- <u>21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30</u>

21 + 29 = 50 ; 22 + 28 = 50 ; 23 + 27 = 50 ; 24 + 26 = 50

Il reste 25 et 30 ; 4×50 + (25 + 30) = 200 + 55

Cette manière de faire peut favoriser le repérage de ce que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série, mais elle peut être un obstacle pour reconnaître le rôle particulier de 45.

Un troisième type d'action consiste à *utiliser la décomposition décimale* comme dans les exemples ci-dessous.

- <u>17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26</u>

10+7,10+8,10+9, 20, 20+1, 20+2, 20+3, 20+4, 20+5, 20+6

3×10 +7×20 + (7 + 8 + 9 +1 + 2 + 3 +4 + 5 + 6) = 170 + 45

- <u>20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29</u>

20, 20+1, 20+2, 20+3, 20+4, 20+5, 20+6, 20+7, 20+8, 20+9

10×20 + (1+2+3+4+5+6+7+ 8+9) = 10×20 + 45

Ceci met en évidence le rôle particulier de 45 et fait apparaître, *si on regroupe les dizaines*, la forme générale $10n + 45$. Les séries commençant par un nombre de la forme $10\times p$ peuvent favoriser dans ce cas l'apparition de l'utilisation de la décomposition à partir du premier nombre, présentée ci-dessous.

Un quatrième type d'action consiste à *décomposer les nombres à partir du premier nombre de la série,* comme dans l'exemple ci-dessous :

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

17, 17+1, 17+2 ; 17+3 ; 17+4 ; 17+5 ; 17+6 ; 17+8 ; 17+9

$17 \times 10 + (1+2+3+4+5+6+7+ 8+9) = 170 + 45$

C'est ce qui conduit le plus naturellement à la forme générale $10\times n + 45$, et permet de la valider simplement.

Un cinquième type d'actions possible consiste à *faire des regroupements en fonction de la position des nombres dans la liste* : on ajoute le premier nombre au dernier, le second à l'avant-dernier et ainsi de suite. On trouve cinq fois le même résultat. Cette méthode est proche de la méthode attribuée à Gauss qui consiste à réécrire la suite des nombres dans l'ordre inverse et à ajouter les nombres correspondants deux par deux. On trouve cette fois dix fois le même résultat qui correspond à deux fois la somme. Ceci conduit à la formule $5\ (2\times n+9)$.

Un sixième type de proposition est apparue à plusieurs reprises avec des futurs professeurs d'école ; elle consiste à prendre la valeur médiane, qui correspond ici à la moyenne, et à la multiplier par 10. Cette méthode se justifie par l'élimination deux à deux des écarts à cette valeur médiane. Elle est liée au fait que la moyenne est ici égale à la valeur médiane. Elle fournit également une méthode très rapide.

Ce qui précède montre que le type d'actions mises en œuvre dans la première étape est susceptible de favoriser plus ou moins l'une des méthodes permettant de répondre rapidement. En outre, les connaissances mobilisées implicitement, ou explicitement, diffèrent d'une méthode à l'autre. Une pratique régulière du calcul réfléchi pourrait favoriser le deuxième type et le troisième type d'action, tandis qu'un entraînement systématique au calcul en colonne pourrait favoriser le premier type. Le quatrième et le sixième type mobilisent les écarts en lien avec le successeur, et pour la sixième également le prédécesseur, tandis que le cinquième s'intéresse plutôt à la recherche d'un invariant,

Il faut noter que les trois dernières méthodes ne favorisent pas particulièrement *a priori* le transfert entre les deux méthodes les plus rapides proposées par les élèves. On peut d'ailleurs interpréter à l'intérieur du système de numération décimale de position la manière dont l'élève qui a proposé la méthode consistant à ajouter 5 à droite du cinquième nombre fait le lien entre sa méthode et la formule générale.

Par ailleurs, étant donné que dans le cas d'une suite comportant dix nombres consécutifs, l'utilisation de la formule générale est moins rapide que la méthode qui consiste à ajouter 5 à droite du cinquième nombre de la liste, on peut penser qu'il sera difficile de convaincre les élèves dans un tel cas de la supériorité de cette méthode sur l'autre.

Pour avancer dans le problème, il est alors naturel de se poser la question de la généralisation à une suite comportant un nombre p donné à l'avance de termes consécutifs.

2.3. Une méthode qui se généralise

La méthode qui se généralise le plus efficacement est la méthode proposée par la majorité des élèves : le résultat est obtenu en appliquant la formule $10\times n + 45$, où n est le premier terme. Elle se généralise en effet pour des séries de p nombres consécutifs, quel que soit p supérieur ou égal à 2, sous la forme $p\times n + S_{p-1}$, où n est le premier nombre de la série, p le nombre d'éléments de la série, et S_{p-1} la somme des $(p-1)$ premiers entiers non nuls. Notons cependant que cette méthode se généralise à condition que le point de vue adopté soit celui du successeur. En effet, le fait que toutes les unités de 0 à 9 apparaissent dans la suite de 10 nombres consécutifs, ne vaut plus lorsque le nombre de termes de la suite n'est pas un multiple de 10. La proposition de remplacer 10 par 8, faite par les auteurs va en effet disqualifier les méthodes s'appuyant sur la numération décimale de position. Ceci permet de revenir sur les différentes méthodes et de dégager ce qui est spécifique avec 10. Il faut noter que ce sont les calculs effectifs qui permettent de confronter les résultats obtenus en appliquant une méthode adaptée à partir du travail fait avec les séries de dix nombres consécutifs. Le domaine des entiers avec ses méthodes élémentaires de calcul joue ici le rôle de *domaine de réalité* ou de *domaine d'expérience*[7] par rapport aux connaissances plus générales de type algébriques que l'on veut construire dans cette situation, ceci parce qu'à priori, ces calculs sont non problématiques pour les élèves concernés. À ce niveau, les nombres entiers, l'addition des entiers et les propriétés élémentaires de l'addition sont *naturalisés*. Ils peuvent de ce fait offrir une sémantique pour la syntaxe du calcul littéral.

3) QUELQUES CONSEQUENCES DIDACTIQUES

L'exemple présenté ci-dessus illustre plusieurs aspects que je résume ci-dessous.

Cet exemple est une nouvelle illustration de ce que la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (Vergnaud, 1991)

Le second aspect est l'*importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation*. Il met en évidence le fait que la situation de formulation ne suffise pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques. Une conséquence immédiate est qu'il n'y a pas, pendant la phase collective, un milieu commun pour la validation, et ceci même si toutes les productions écrites des élèves ont été prises en compte. Sur le plan méthodologique, ceci montre que, pour analyser les enjeux des situations de validation, il est nécessaire de recueillir d'autres traces. Sur le plan du déroulement même de la situation, cela indique que l'émergence d'une méthode générale doit être soumise à nouveau « au tribunal de l'expérience », afin de pouvoir être validée par chacun des sujets. Ceci pourrait expliquer un certain nombre de résultats montrant que les sujets n'abandonnent pas facilement leur mode de traitement des situations, même après qu'un travail collectif important ait été fait (Arsac & al., 1992, ARSAC et Mante, 2008).

La prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques, qui est au cœur de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, nécessite de considérer différents types de milieu (Bloch, 2001) : *milieu épistémologique ; expérimental a priori ; confrontation à la contingence*, et de repenser la question de l'élève générique :

> « La situation didactique qui contient une phase collective de validation ne peut pas être modélisée par les interactions adidactiques d'un seul sujet générique : la modélisation doit incorporer les possibles interactions autour des situations adidactiques d'autres sujets génériques présents dans la classe. » (Barallobres & Giroux, op. cit.)

Concernant la gestion en classe des situations de validation, la présence de plusieurs milieux potentiels dans la phase de validation est l'un des facteurs qui rendent délicats les débats. C'est un élément qui souligne l'importance des connaissances mobilisées par les sujets pendant l'action, dans l'élaboration des conjectures et des preuves. Ceci fournit des indicateurs des connaissances que le professeur doit mobiliser pour piloter les situations de ce type et rend tout à fait clair le fait que l'analyse fine des interactions ne puisse pas faire l'économie d'une analyse approfondie de l'épistémologie des savoirs en jeu, au-delà des seuls phénomènes de transposition didactique. Ceci motive les choix que nous avons faits dans la ressource d'une entrée par l'analyse mathématique du problème, avant de s'intéresser aux situations pour la classe, pour terminer par des prolongements possibles.

Références

ARSAC, G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. Recherches en

[7] Ici, il ne s'agit plus d'objets sensibles, mais d'objets, de propriétés et de techniques, naturalisés, c'est-à-dire suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables (on trouve un sens proche de cette notion de réalité chez Tarski, 1960). Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions et constituent donc en ce sens un *domaine d'expérience* pour le sujet, dans un sens voisin de Boero (2002), à qui j'emprunte, en la détournant un peu, l'expression.

Didactique des Mathématiques, Vol 8/3. 267-312

ARSAC G. , GERMAIN G., MANTE M. (1991) *Problème ouvert et situation problème*, IREM de Lyon.

ARSAC G. & al. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon; I.R.E.M. de Lyon.

ARSAC, G. & Mante, M. (2007) Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon

ARTIGUE, M. (1991) Epistémologie et Didactique in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/2.3. 241-285.

BARALLOBRES, G. (2007) Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés.

BARALLOBRES G. & GIROUX, J. (2008), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

BLOCH I. (2001), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage

BOERO, P. (2002) Entrer dans la culture des théorèmes, in Assude T. & Grugeon B. (eds), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2000, IREM de Paris7, Paris

BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage

CHEVALLARD Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques*, n°427, 34-36.

DIAS, T. (2005) La dimension expérimentale en mathématiques : mythe ou réalité ? in *actes des 4èmes rencontres de l'ARDIST,* Lyon, octobre 2005

DIAS,T. & DURAND-GUERRIER, V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, 60, pp. 61-78.

DORIER,J.L. (2000) *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions*. Les cahiers du laboratoire Leibniz n°12, http://www.leibniz-imag.frLesCahiers.

DURAND-GUERRIER, V. (2006) La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique , in Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C. et Mercier A. (eds) 2006, *Actes des journées mathématiques de l'INRP*

DURAND-GUERRIER, V., (2007) Les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques à l'école élémentaire, à paraître, in *Actes du colloque XXXIIIe Colloque des Professeurs et Formateurs de Mathématiques* chargés de la Formation des Maîtres, *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?***,** Dourdan**,** 8-10 juin 2006

Eco, U. (1980) *Le signe*, Livre de poche

PERRIN D. (2007), L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, à paraître, in *Actes du colloque XXXIIIe Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres, Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école* ***?,*** Dourdan**,** 8-10 juin 2006

TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris-Louvain

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, pp.133-169.