

Université Claude Bernard Lyon 1
L3 ó Parcours Physique ó Chimie



ONDES ET VIBRATIONS

TRAVAUX PRATIQUES

Bat. Lippmann ó Salle 116

Semestre Automne 2013

RAPPELS SUR LES VIBRATIONS ET SUR LA PROPAGATION DES ONDES

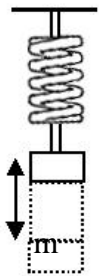
A - VIBRATIONS

Nous ne considèrerons ici que les "oscillations sinusoïdales" des systèmes discrets.

I) ETUDE DES OSCILLATIONS D'UN SYSTEME VIBRATOIRE A UN DEGRE DE LIBERTE

1) OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

a) Oscillations libres sans amortissement



Considérons à titre d'exemple un corps de masse m suspendu à un ressort de raideur k sans masse. Supposons que l'on communique à la masse m un déplacement de z vers le bas, à partir de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne sans vitesse initiale.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + k z = 0$$

ou encore $\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ où ω_0 est la "pulsation propre" du système.

D'une façon générale, quelle que soit la variable vibratoire ξ (lettre grecque appelée "ksi"), l'équation différentielle caractéristique sera du type

$$a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + c \xi = 0 \quad (\text{R1})$$

ou encore $\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (\text{R2})$$

La solution de cette équation est de la forme : $\xi = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ où A et ϕ sont deux constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les variations de ξ au cours du temps sont sinusoïdales avec :

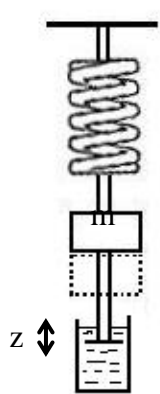
- une "période propre" : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}$ (R3)

- une "fréquence propre" : $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{a}}$ (R4)

b) Oscillations libres avec amortissement visqueux

L'amortissement est un effort de freinage dont le principal effet est la réduction des amplitudes de vibration. On distingue essentiellement deux types d'amortissement :

- L'amortissement dû à des frottements "secs" ou "solides" qui pour un réglage donné demeurent constants et indépendants du mouvement. Pour qu'il y ait mouvement, il faut donc appliquer une contrainte au moins égale à l'effort d'amortissement.
- L'amortissement visqueux (par exemple celui donné par les amortisseurs hydrauliques) dans lequel la contrainte de frottement est à tout instant proportionnelle à la vitesse relative du système. L'amortissement visqueux a donc un caractère essentiellement dynamique ; il ne modifie pas la position d'équilibre statique.



Considérons pour cela à nouveau l'exemple du corps de masse m suspendu à un ressort de raideur k sans masse et relié à un amortisseur dont le rôle est d'introduire une force de freinage proportionnelle à la vitesse relative. Le coefficient de proportionnalité noté ρ (lettre grecque "rho") s'appelle la "viscance" ou "coefficient d'amortissement visqueux".

A un instant donné la masse est à la distance z de la position d'équilibre. La force élastique de rappel due au ressort vaut $-kz$ et tend à ramener la masse dans sa position d'équilibre, tandis que la force de

freinage due à l'amortisseur s'oppose au mouvement et vaut $-\rho \frac{dz}{dt}$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - \rho \frac{dz}{dt} \quad (\text{R5})$$

Pour un système vibratoire autre que mécanique (électrique, acoustique, etc...), de variable vibratoire ξ , l'équation précédente pourra toujours se mettre sous la forme

$$a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \rho \frac{d\xi}{dt} + c\xi = 0 \quad (\text{R6})$$

où a est un terme inertiel et c un terme élastique

On rappelle que dans une équation physique tous les termes doivent être de même dimension ; il est commode de s'arranger pour que les différents paramètres intervenant soient de dimension zéro (auquel cas leur valeur numérique elle-même ne dépend plus du système d'unités choisi) ou tout au moins de caractériser les divers paramètres par des coefficients sans dimensions.

Par exemple posons $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ et $\rho = 2\zeta\omega_0 a$

où ω_0 a la dimension de l'inverse d'un temps, et où ζ (lettre grecque "dzéta") est un coefficient sans dimension appelé "facteur d'amortissement" qui permet de caractériser le frottement.

L'équation (6) s'écrit alors

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\omega_0 \zeta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (\text{R7})$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre : l'équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2\omega_0 \zeta r + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{R8})$$

qui admet deux racines r' et r'' ; la solution de l'équation différentielle (R7) doit être cherchée sous la forme :

$$\xi = A' e^{r't} + A'' e^{r''t} \quad (\text{R9})$$

A' et A'' sont deux constantes d'intégration définies par les conditions initiales. On remarquera que, quelle que soit la nature de la variable vibratoire ξ , les équations (R7) et (R9) demeurent inchangées. La forme (R9) de la solution de l'équation (R7) dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique (R8), c'est-à-dire du signe du discriminant réduit de cette équation

$$\Delta = \omega_0^2 (\zeta^2 - 1)$$

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow \zeta > 1$

$$r' \text{ et } r'' = -\omega_0 \zeta \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Ces racines sont toutes deux réelles négatives : la solution donnée par (R9) est alors constituée de la somme de deux exponentielles constamment décroissantes au cours du temps.

Ce régime est dit "apériodique".

- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow \zeta = 1$

$$r_1 = r_2 = -\omega_0 \zeta$$

la solution peut se mettre sous la forme :

$$\xi = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \quad \text{(R10)}$$

La valeur particulière de ρ qui conduit à $\zeta = 1$ est appelée "coefficient d'amortissement critique" noté ρ_{cr} .

On voit que pour l'exemple mécanique ci-dessus,

$$\rho_{cr} = 2\omega_0 m = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_0} \quad \text{(R11)}$$

De façon générale, on pourra donc écrire

$$\zeta = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad \text{(R12)}$$

Ce régime est dit "critique"

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow \zeta < 1$

Les racines r' et r'' deviennent complexes conjuguées

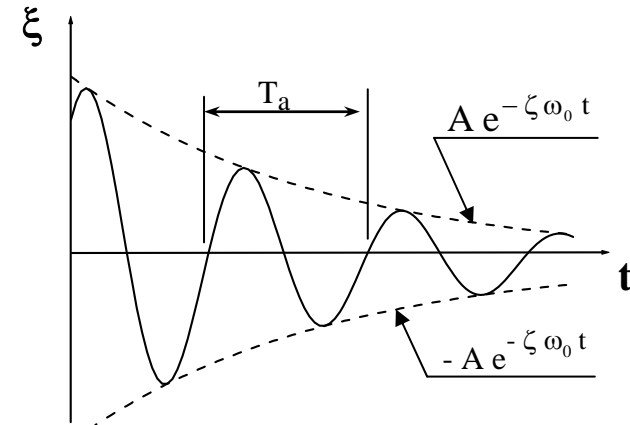
$$r' \text{ et } r'' = -\omega_0 \zeta \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

si on pose $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ (R13)

où ω_a est la "pulsation amortie", alors la solution (R9) peut se mettre sous la forme :

$$\xi = A e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_a t + \phi) \quad \text{(R14)}$$

L'allure des variations de ξ au cours du temps est la suivante :



Le terme sinusoïdal est tout à fait analogue à celui que nous avons obtenu dans le cas des oscillations libres sans amortissement. Il représente une fonction pseudo-périodique de "pseudo-période" T_a :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{(R15)}$$

or $\frac{2\pi}{\omega_0}$ correspond à la période propre T_0 définie en absence d'amortissement, d'où

$$T_a = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{(R16)}$$

- On voit que l'introduction de l'amortissement augmente la période. Cependant lorsque le facteur d'amortissement est petit, l'accroissement de la période est un infiniment petit du 2^{ème} ordre. Aussi dans de nombreux problèmes pratiques, on admet qu'un amortissement ne modifie pas la période des oscillations.
- Le terme exponentiel $e^{-\zeta \omega_0 t}$ décroît progressivement au cours du temps et l'amplitude des vibrations est progressivement atténuée.

- Les constantes d'intégration A et ϕ sont déterminées par les conditions initiales du mouvement.

Ce régime est dit "oscillant amorti".

Lorsque $\zeta > 1$ l'amortissement est dit surcritique
 $\zeta = 1$ critique
 $\zeta < 1$ souscritique

2) OSCILLATIONS FORCEES SINUSOÏDALEMENT D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE AVEC FROTTEMENTS VISQUEUX

a) Régime transitoire, régime permanent

On a vu jusqu'a présent le cas des oscillations libres (le système, initialement écarté de sa position de repos, est abandonné à lui-même) dont l'équation du mouvement est :

$$a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \rho \frac{d\xi}{dt} + c \xi = 0$$

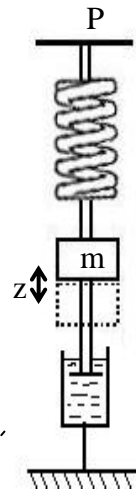
Un tel système vibre librement avec une pulsation spécifique ω_a , définie relation (R13) :

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 (1 - \zeta^2) \text{ où } \omega_0^2 = \frac{c}{a}, \text{ et où } \zeta^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_{cr}} \right)^2 = \frac{\rho^2}{4c a}$$

Imposons alors au système vibratoire une contrainte sinusoïdale supplémentaire (une force en mécanique, une tension en électricité, etc...) définie par

$$C(t) = C_0 \cos(\omega_f t)$$

L'évolution du système sera perturbée par cette contrainte supplémentaire de pulsation ω_f différente de ω_0 .



Reprenons l'exemple de la masse suspendue à un ressort. Il existe différentes façons d'appliquer une telle force au système : par exemple en imposant au point P un mouvement sinusoïdal

$$Z_P(t) = Z_0 \cos(\omega_f t)$$

dans ces conditions, la force supplémentaire appliquée à la masse, est

$$C(t) = +k Z_P(t) = k Z_0 \cos(\omega_f t) \quad \text{(R19)}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \rho \frac{dz}{dt} + k x = C(t) = k Z_0 \cos(\omega_f t)$$

Dans le cas d'un système vibratoire quelconque (électricité, acoustique, etc...), cette équation différentielle demeurera inchangée :

$$a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \rho \frac{d\xi}{dt} + c \xi = C_0 \cos(\omega_f t) \quad \text{(R20)}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants, avec un second membre dépendant du temps. La solution est une combinaison linéaire de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre : cette solution particulière sera cherchée conforme au second membre.

- L'équation (R20) sans second membre est exactement l'équation (R6) : la solution de l'équation sans second membre n'est donc rien d'autre que la solution générale du système en oscillations libres à la pulsation ω_a . Or on a vu que dans le cas où il y a des frottements, l'amplitude des oscillations libres diminuait exponentiellement : cette oscillation libre va donc rapidement s'estomper.

- La solution particulière de l'équation avec second membre est cherchée conforme au second membre : elle sera donc une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω_f :

$$\xi = A \cos(\omega_f t - \phi) \quad (\text{R21})$$

où ϕ est le déphasage entre la contrainte appliquée C et les vibrations du système ξ .

Remarque 1 - tant que les deux modes de vibration aux pulsations ω_f et ω_0 coexistent, on parle du "régime transitoire" de vibration,

- lorsque seul subsiste le mouvement à la pulsation ω_f , on parle du "régime permanent" qui demeurera aussi longtemps que sera appliquée la contrainte forcée.

Remarque 2 à la différence du régime d'oscillations libres pour lequel les constantes d'intégration A et ϕ de l'équation (R14) étaient déterminées à l'aide des conditions initiales, les constantes A et ϕ de l'équation (R21) ne sont pas des constantes d'intégration et sont parfaitement déterminées en fonction de ω_f .

b) Caractéristiques des mouvements forcés en régime permanent

α) Amplitude et déphasage

On étudiera ici uniquement les caractéristiques du régime d'oscillations forcées en régime permanent, c'est-à-dire que l'on cherche ξ sous la forme (R21)

$$\xi = A \cos(\omega_f t - \phi)$$

Par la suite, il sera beaucoup plus aisé de travailler sur le corps des complexes :

$$\xi = A e^{j(\omega_f t - \phi)} \quad (\text{R22})$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle (R20), il vient

$$- a A \omega_f^2 e^{j(\omega_f t - \phi)} + j \rho A \omega_f e^{j(\omega_f t - \phi)} + c A e^{j(\omega_f t - \phi)} = C_0 e^{j \omega_f t}$$

Soit après simplification par $e^{j \omega_f t}$, en divisant par a et en utilisant les variables réduites ω_0 et ζ définies au paragraphe I.1.b :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_{cr}} = \frac{\rho}{2a \omega_0} \Rightarrow \frac{\rho}{a} = 2 \omega_0 \zeta$$

On obtient

$$A \left[(\omega_0^2 - \omega_f^2) + 2 j \omega_0 \omega_f \zeta \right] e^{-j \phi} = \frac{C_0}{a} \quad (\text{R23})$$

d'où on peut tirer $\tan(\phi)$ et A : en effet (23) s'écrit

$$e^{j \phi} = \frac{a A}{C_0} \left[(\omega_0^2 - \omega_f^2) + 2 j \omega_0 \omega_f \zeta \right] \quad (\text{R24})$$

Cette dernière équation permet d'obtenir le déphasage :

$$\tan(\phi) = \frac{2 \omega_f \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \zeta$$

ou encore en posant

$$\alpha = \frac{\omega_f}{\omega_0}$$

$$\tan(\phi) = \frac{2 \alpha}{1 - \alpha^2} \zeta \quad (\text{R25})$$

de même, en prenant le module de l'expression (R24), on obtient A :

$$A = \frac{C_0}{a} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\zeta\omega_0^2\omega_f^2}}$$

ou encore, en divisant tout par ω_0^2 et sachant que $\alpha = \frac{\omega_f}{\omega_0}$

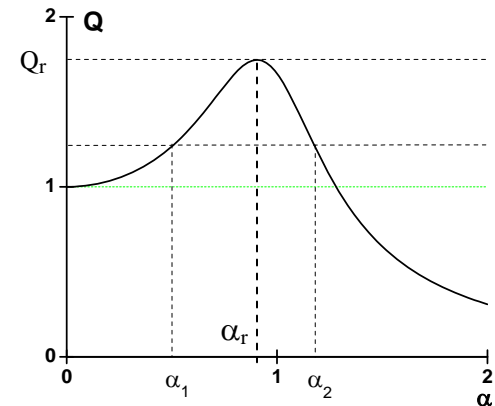
$$A = \frac{\alpha^2 C_0}{a \omega_f^2 \sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \zeta^2}} \quad (\text{R26})$$

Les relations (R25) et (R26) montrent que, en régime permanent, amplitude et phase sont parfaitement définies par la connaissance du système vibratoire et de la contrainte imposée, indépendamment des Mais en général, dans un souci de normalisation, on n'étudie pas l'amplitude A qui est fonction de l'amplitude C_0 , mais la variable réduite Q appelée "coefficient d'amplification", définie par :

$$Q = \frac{A}{\alpha^2 C_0 / a \omega_f^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \zeta^2}} \quad (\text{R27})$$

On pourra constater que Q est une grandeur sans dimension.

β) Bande Passante



Suivant la valeur de ζ , Q peut - ou ne peut pas - être supérieur à l'unité. Dans le cas où Q peut être supérieur à l'unité, ses variations obéissent à une loi analogue à celle représentée sur la figure ci-contre : Q passe par un extremum Q_r pour la valeur α_r ($\alpha_r < 1$). Cette valeur caractéristique correspond à la "résonance" lorsqu'il y a un amortissement visqueux.

On appelle alors "bande passante" Δ l'intervalle $[\alpha_2 - \alpha_1]$ où α_2 et α_1 sont les valeurs de α pour lesquelles Q vaut $Q_r / \sqrt{2}$. La bande passante

peut aussi être définie par les intervalles en pulsation $[\omega_2 - \omega_1]$ ou en fréquence $[f_2 - f_1]$ où f est la fréquence de la contrainte imposée.

Mais Q_r , α_r et Δ peuvent être aussi évalués de la façon suivante : à la résonance, on a

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dQ}{d\omega} = 0$$

Ce qui entraîne : $\alpha_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ soit $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

d'où $Q_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$

Si on se place dans le cas d'une résonance prononcée, on aura $\zeta \ll 1$, alors

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_r &\approx 1 - \zeta^2 \approx 1 \\ Q_r &\approx \frac{1}{2\zeta} \end{aligned}} \quad (\text{R28})$$

α_1 et α_2 sont alors déterminés sachant que

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{2}}$$

En reportant cette solution dans l'équation (R27) et en l'élevant au carré, et en négligeant les termes en ζ^2 , on obtient :

$$\alpha_1^2 \approx 1 - 2\zeta$$

$$\alpha_2^2 \approx 1 + 2\zeta$$

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) = (\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \approx 4\zeta$$

Or

$$\alpha_2 + \alpha_1 \approx 2\alpha_r \approx 2$$

soit en tenant compte de la relation (28),

$$\boxed{\Delta = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 2\zeta = \frac{1}{Q_r}} \quad (\text{R29})$$

II) OSCILLATIONS À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

Un système à plusieurs degrés de liberté est un système composé de plusieurs sous-systèmes indéformables liés entre eux par des composants (mécaniques ou électriques) susceptibles de transmettre des contraintes (des forces mécaniques ou des intensités).

Pour la suite, et pour mieux comprendre, on utilisera le modèle de la corde plombée comportant trois masselottes identiques et équidistantes entre elles ou des extrémités (**Modèle étudié expérimentalement au TP relatif aux cordes vibrantes**).

1) Oscillations libres couplées à trois degrés de liberté

Le système mécanique est composé de trois masses identiques m_1 , m_2 , et m_3 égales à m , supportées par une corde de masse négligeable tendue sous une tension T (figure R.1). La distance entre masses ou entre extrémités et masses vaut a . Les déplacements, supposés seulement verticaux seront notés ψ_k , où k est l'indice identifiant la masselotte.

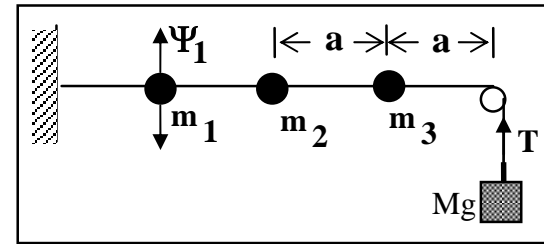


Fig. R.1 - Modèle expérimental de corde vibrante à trois masses

L'expérience montre qu'un tel système obéit au système d'équations différentielles suivant (que l'on pourra redémontrer) :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\psi}_1 + 2\frac{T}{a}\psi_1 - \frac{T}{a}\psi_2 = 0 \\ -\frac{T}{a}\psi_1 + m_2 \ddot{\psi}_2 + 2\frac{T}{a}\psi_2 - \frac{T}{a}\psi_3 = 0 \\ -\frac{T}{a}\psi_2 + m_3 \ddot{\psi}_3 + 2\frac{T}{a}\psi_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{R.29})$$

On montre alors que les seules solutions possibles sont des combinaisons linéaires des modes propres sinusoïdaux de type $\psi_k = \Psi_{0k} e^{j(\omega t + \Phi_k)}$. Dans ces conditions, en identifiant les masses à m , et en posant $\omega_0^2 = 2 \frac{T}{ma}$, le système d'équations (R.29) devient :

$$\begin{cases} m(\omega_0^2 - \omega^2) \psi_1 - \frac{T}{a} \psi_2 = 0 \\ -\frac{T}{a} \psi_1 + m(\omega_0^2 - \omega^2) \psi_2 - \frac{T}{a} \psi_3 = 0 \\ -\frac{T}{a} \psi_2 + m(\omega_0^2 - \omega^2) \psi_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{R.30})$$

Ce système est un système linéaire et homogène qui n'aura de solution autre que la solution triviale identiquement nulle que si le déterminant des ψ_k est nul, soit

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \left[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2 \left(\frac{T}{a} \right)^2 \right] = 0$$

dont les solutions ω_k^2 sont

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{T}{ma} \sqrt{2} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 \quad \omega_3^2 = \omega_0^2 + \frac{T}{ma} \sqrt{2}$$

L'étude du système (R.29) en utilisant successivement chacune de ces trois solutions permet de déterminer les relations d'amplitude entre les Ψ_{ik} et de phase entre les Φ_{ik} , où i est l'ordre de la pulsation ω ; on montrerait en particulier que les Φ_{ik} valent dans tous les cas 0 ou π : les masselottes vibrent en phase ou en opposition de phase. Ces résultats peuvent être représentés sur les schémas suivants :

1er mode de vibration, à la pulsation ω_1

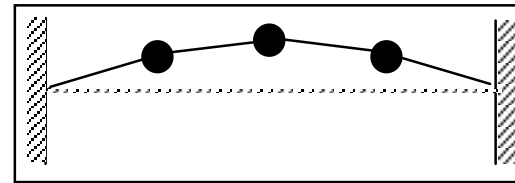


Fig. R. 2 a
Les trois masses vibrent en phase

2ème mode de vibration, à la pulsation ω_2 :

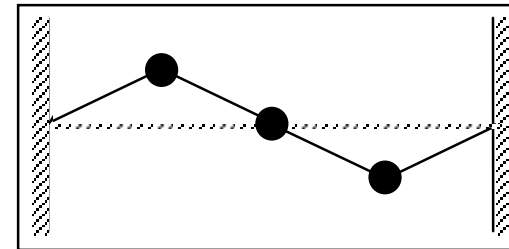


Fig. R2 b
La masse (2) est immobile, les masses (1) et (3) vibrent en opposition de phase.

3ème mode de vibration, à la pulsation ω_3 :

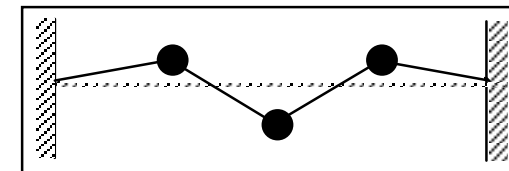


Fig. R.2 c
Les masses (1) et (3) sont en phase entre elles, et en opposition de phase avec la masse (2).

On peut alors constater qu'il est possible de présenter les trois configurations de la Fig. R.2 en répartissant les masselottes sur des sinusoïdes (Fig. R.3 - voir page suivante), le nombre de demi sinusoïdes correspondant à l'ordre de la pulsation ; ceci est vrai quel que soit le nombre de masselottes.

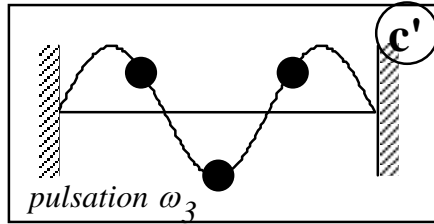
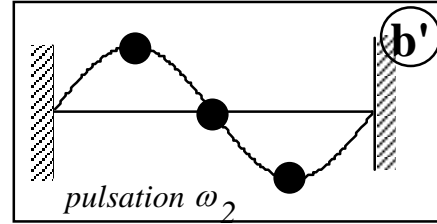
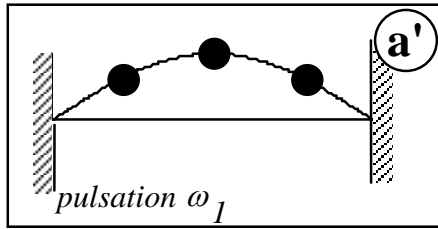


Fig. R.3 - Schéma de répartition des 3 masselottes sur la corde supposée pouvoir vibrer sinusoïdalement.

2° Oscillations forcées de systèmes couplés

Si on applique à la masse (1) une force sinusoïdale de type $F = F_0 e^{j\omega t}$, donc de pulsation ω , les amplitudes ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 de vibration des trois masses en régime forcé obéissent au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + 2\frac{T}{a}\psi_1 - \frac{T}{a}\psi_2 = F_0 e^{j\omega t} \\ -\frac{T}{a}\psi_1 + m\ddot{\psi}_2 + 2\frac{T}{a}\psi_2 - \frac{T}{a}\psi_3 = 0 \\ -\frac{T}{a}\psi_2 + m\ddot{\psi}_3 + 2\frac{T}{a}\psi_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{R.31})$$

Ces équations auront, en régime permanent, des solutions sinusoïdales de type $\psi_k = \Psi_{0k} e^{j(\omega t + \Phi_k)}$

En posant $\omega_0^2 = 2\frac{T}{ma}$ et en notant $\overline{\Psi}_k$ les amplitudes complexes

$\Psi_{0k} e^{j\Phi_k}$, le système (3) s'écrit :

$$\begin{cases} m(\omega_0^2 - \omega^2)\overline{\Psi}_1 - \frac{T}{a}\overline{\Psi}_2 = F_0 \\ -\frac{T}{a}\overline{\Psi}_1 + m(\omega_0^2 - \omega^2)\overline{\Psi}_2 - \frac{T}{a}\overline{\Psi}_3 = 0 \\ -\frac{T}{a}\overline{\Psi}_2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)\overline{\Psi}_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{R.32})$$

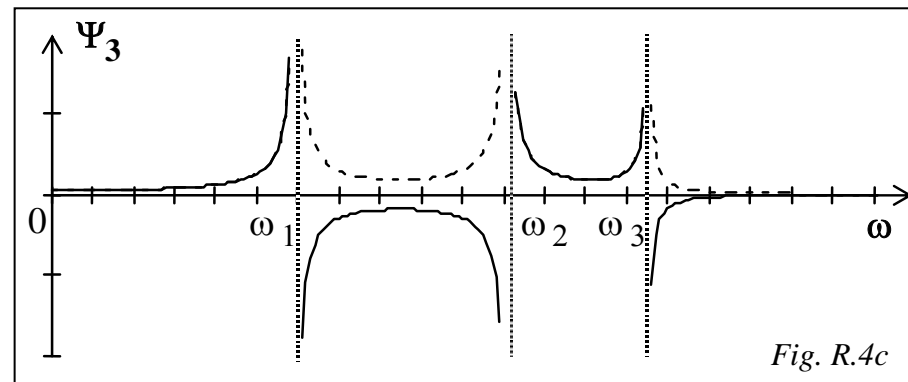
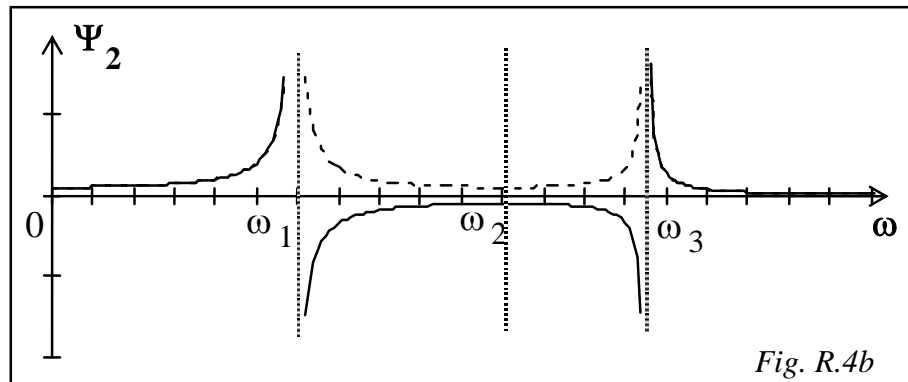
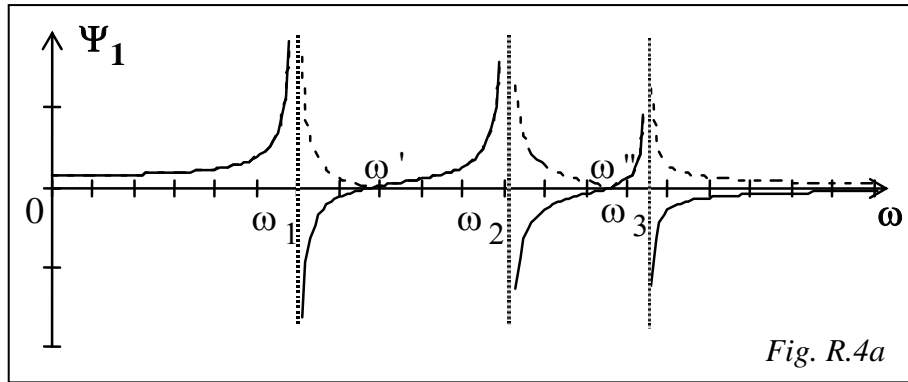
La résolution de ce système montre que les amplitudes complexes $\overline{\Psi}_k$ sont réelles, positives ou négatives, ce qui traduit le fait que les masses oscillent en phase ou en opposition de phase. Ces solutions sont représentées sur la figure R.4 (voir page suivante) : les variations des $\overline{\Psi}_k$ sont représentées en trait plein, les amplitudes réelles (module des amplitudes complexes) étant représentées en pointillés lorsque les $\overline{\Psi}_k$ sont négatifs.

• les masses (1) et (3) résonnent sur les pulsations ω_1 , ω_2 et ω_3 qui sont justement les trois pulsations propres observées en régime d'oscillations libres. Par contre, la masse (2) ne semble pratiquement pas vibrer pour la pulsation ω_2 . Ces trois pulsations sont alors appelées pulsations de résonance.

- Pour la pulsation ω_1 , les trois masses vibrent en phase conformément au premier mode propre.

- Pour la pulsation ω_2 , les masses (1) et (3) sont en opposition de phase.

- Pour la pulsation ω_3 , les masses (1) et (3) sont en phase, tandis que la masse (2) est en opposition de phase avec les deux autres, conformément au troisième mode propre.



• Pour deux pulsations ω' et ω'' , comprises l'une sur l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, l'autre sur l'intervalle $[\omega_2, \omega_3]$, la masse m_1 ne vibre pas, tandis que les deux autres vibrent. Ces modes particuliers s'interprètent de la façon suivante (Fig. R.5) : pour ces deux fréquences particulières, le fil de liaison entre les masses (1) et (2) impose, par couplage, une force de réaction de (2) sur (1) dont la composante verticale est à chaque instant égale et opposée à la force imposée \vec{F}_0 (verticale) appliquée directement à la masse (1). Le système se comporte alors comme un système à deux degrés de liberté. Ces fréquences particulières ω' et ω'' sont appelées fréquences d'antirésonance du système à trois masses."

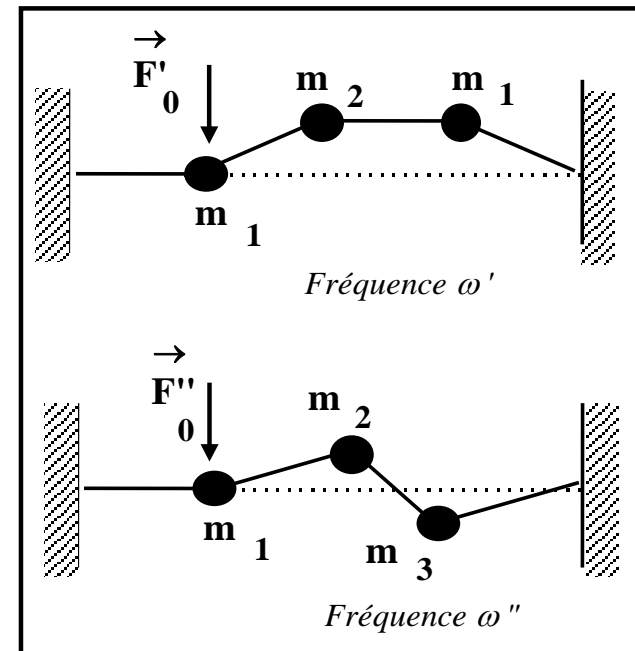


Fig. R.5- Modes de vibration à l'antirésonance

En fait, ceci correspond à des conditions expérimentales très instables à cause des frottements qui ne sont pas pris en compte dans ce modèle :

Rappels vibrations et propagation des ondes

ainsi, il n'est pas possible de mettre ces modes de vibration en évidence en mécanique, alors que l'on peut s'en approcher en électricité lorsque les résistances sont négligeables.

B - PROPAGATION DES ONDES SINUSOÏDALES

Cette étude sera restreinte aux ondes sinusoïdales, sachant que tous les types d'onde peuvent être traités par la superposition d'ondes sinusoïdales (séries ou intégrales de Fourier).

1) Expression des ondes progressives à une dimension.

Lorsqu'une source émet une onde sinusoïdale, celle-ci s'éloigne de la source : on parle d'"**onde progressive**". Soit T sa période, et λ sa longueur d'onde. Si le milieu de propagation n'est pas dissipatif, l'expression de l'onde, équation caractérisant l'amplitude de l'onde en fonction du temps t et de l'espace x , s'écrit :

$$\psi_P(x, t) = \Psi_{0P} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \Psi_P e^{2j\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \quad (\text{R.33})$$

où v est la vitesse de propagation de l'onde dans ce milieu, la direction de propagation étant choisie comme axe des x .

2) Réflexion, ondes stationnaires

Si après avoir parcouru une distance ℓ , l'onde parvient à un changement de milieu, elle devra satisfaire à des conditions de continuité au niveau de l'interface : pour cela, une partie de l'onde devra être réfléchi. Soit ρ_0 le **coefficient de réflexion** correspondant : c'est un nombre complexe (déphasage lors de la réflexion), de module

inférieur ou égal à l'unité. L'équation de l'"**onde réfléchi**" au point d'abscisse x à l'instant t , s'écrit :

$$\psi_R(x, t) = \rho_0 \cdot \Psi_{0P} e^{j\omega\left(t - \frac{\ell + (\ell - x)}{v}\right)} = \Psi_{0R} e^{j\omega\left(t + \frac{x - 2\ell}{v}\right)} \quad (\text{R.34})$$

Ainsi, à chaque instant t , un point situé à l'abscisse x verra une vibration $\psi_S(x, t)$ qui est la somme de $\psi_P(x, t)$ et de $\psi_R(x, t)$:

$$\psi_S(x, t) = \Psi_{0P} \left[e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} + \rho_0 e^{j\omega\left(t + \frac{x - 2\ell}{v}\right)} \right] \quad (\text{R.35})$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi_S(x, t) &= \Psi_{0P} \left[e^{-2j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} + \rho_0 e^{2j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} \right] e^{j\omega\left(t - \frac{\ell}{v}\right)} \\ \psi_S(x, t) &= \Psi_{0P} \left[1 + \rho_0 e^{4j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} \right] e^{-2j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} e^{j\omega\left(t - \frac{\ell}{v}\right)} \end{aligned} \quad (\text{R.36})$$

Ces expressions sont des expressions sinusoïdales du temps : ce sont les équations des ondes stationnaires. La partie indépendante du temps constitue l'amplitude complexe des ondes stationnaires. Cette amplitude complexe dépend expressément de x et du coefficient de réflexion complexe ρ_0 :

$$\overline{\Psi_{0S}(x)} = \Psi_{0P} \left[1 + \rho_0 e^{4j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} \right] e^{-2j\pi\frac{x-\ell}{\lambda}} \quad (\text{R.37})$$

On notera ainsi que l'amplitude réelle $\Psi_{0S}(x)$ de l'onde stationnaire varie entre les deux valeurs extrêmes

$$\Psi_{0S}(x)_{\min} = 1 - |\rho_0| \quad \text{et} \quad \Psi_{0S}(x)_{\max} = 1 + |\rho_0|$$

les endroits où $\Psi_{0S}(x)$ est minimum sont appelés "nœuds", les endroits où $\Psi_{0S}(x)$ est maximum sont appelés "ventres", la distance entre deux nœuds (ou deux ventres) successifs est égale à $\lambda / 2$.

Divers cas particuliers doivent être envisagés :

a) Cas où le coefficient de réflexion $\rho_0 = -1$

(cas des figures R.6 et R.7 - voir les figures à la fin du chapitre, page 14) :

Il s'agit là d'un interface "parfaitement élastique" (tuyau sonore fermé en acoustique, court-circuit en électricité, ...). Dans ce cas, l'onde progressive est entièrement réfléchi, de telle sorte que l'amplitude de l'onde stationnaire soit nulle (nœud de vibration) au niveau de l'interface ; ceci impose que lors de la réflexion au niveau de l'interface il y ait un déphasage de π entre l'onde progressive et l'onde réfléchi. Les ondes stationnaires sont alors caractérisées :

- par une amplitude minimale $\Psi_{0S}(x)_{\min} = 0$ pour $x = \ell - k \frac{\lambda}{2}$
 $k \in \mathbb{N}$

On est en présence des nœuds nuls de l'onde stationnaire ; en particulier, il y a un nœud à l'extrémité $x = \ell$.

- par une amplitude maximale $\Psi_{0S}(x)_{\max} = 2\Psi_{0P}$ pour $x = \ell - (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$

On est en présence des ventres de l'onde stationnaire : leur amplitude vaut deux fois l'amplitude de l'onde progressive

b) Cas où le coefficient de réflexion $\rho_0 = +1$

Il s'agit là d'un interface "parfaitement mou" (tuyau sonore ouvert en acoustique, circuit ouvert en électricité, ...) : l'onde progressive est entièrement réfléchi, mais sans déphasage lors de la réflexion : on a un ventre de vibration sur l'interface. Les ondes stationnaires sont alors caractérisées

- par une amplitude maximale $\Psi_{0S}(x)_{\max} = 2\Psi_{0P}$ pour $x = \ell - k \frac{\lambda}{2}$

On est en présence des ventres de l'onde stationnaire dont l'amplitude vaut deux fois l'amplitude de l'onde progressive; en particulier, il y a un ventre à l'extrémité $x = \ell$.

- par une amplitude minimale $\Psi_{0S}(x)_{\min} = 0$ pour $x = \ell - (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$

On est en présence des nœuds de l'onde stationnaire.

c) Cas de la réflexion sur une terminaison dissipative

$$|\rho_0| < 1$$

(cas des figures R.7 et R.8 - voir les figures à la fin du chapitre, page 15) :

Ceci correspond à une absorption de puissance par la terminaison : l'amplitude de l'onde réfléchi est inférieure à celle de l'onde incidente, mais ρ_0 est réel, compris strictement entre -1 et +1. L'amplitude de l'onde stationnaire oscille entre

- $\Psi_{0S}(x)_{\min} = 1 - |\rho_0|$ pour un **nœud dont l'amplitude est non nulle**,
- $\Psi_{0S}(x)_{\max} = 1 + |\rho_0|$ pour un ventre.

Comme cela a déjà été dit précédemment, l'onde stationnaire a une amplitude qui varie sinusoidalement au cours du temps (Fig. R.8), mais qui ne varie pas sinusoidalement dans l'espace (Fig.R.9) .

3) Rapport d'onde stationnaire

L'amplitude Ψ_{0s} des ondes stationnaires (enveloppe des ondes résultantes) varie donc entre $1 - |\rho_0|$ et $1 + |\rho_0|$: elle est caractéristique de l'interface plus ou moins réfléchissant situé en $x = \ell$. On a alors pris l'habitude de caractériser ce pouvoir de réflexion par le "**rapport** (ou improprement "**taux**") **d'onde stationnaire**" N :

$$N = \frac{\Psi_{0s\max}}{\Psi_{0s\min}} = \frac{1 + |\rho_0|}{1 - |\rho_0|} \quad (\mathbf{R.38})$$

Ce rapport varie entre 1 pour $\rho_0 = 0$ (pas d'onde réfléchie, donc pas d'onde stationnaire), et l'infini pour $|\rho_0| = \pm 1$ (réflexion totale).

Pour les figures 6 à 9, voir pages suivantes.

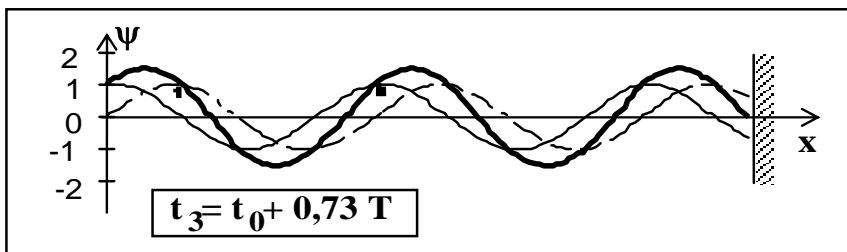
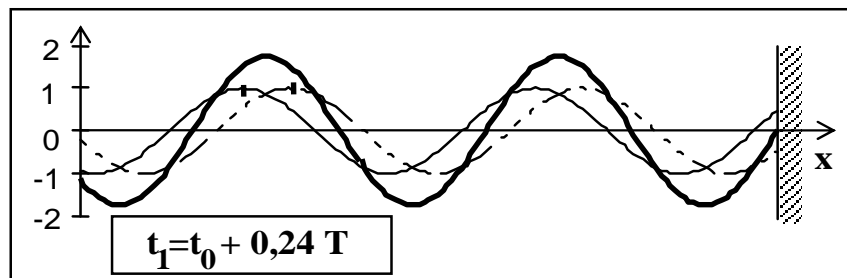
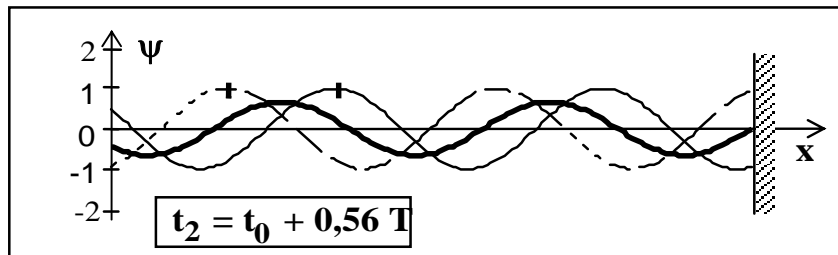
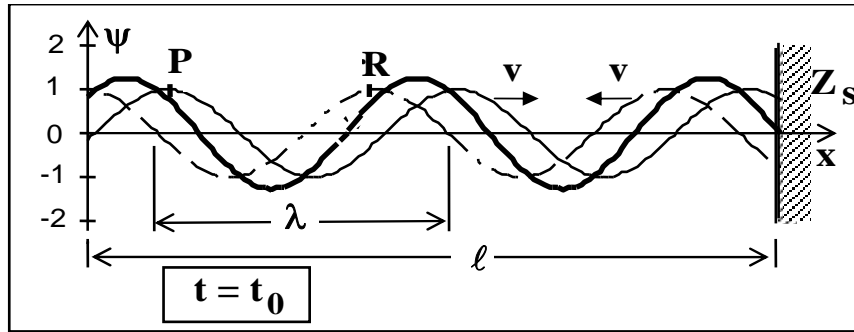


Fig.R.6 - (figures ci contre) Représentation d'une onde, de longueur d'onde λ , de période T , à différents instants t_0, t_1, t_2 et t_3 : l'onde progressive (en trait continu fin) se réfléchit sur une terminaison parfaitement réfléchissante (coefficient de réflexion $\rho_0 = -1$). L'onde réfléchie est représentée en pointillés. L'onde résultante (en trait continu épais) est la somme de l'onde progressive et de l'onde réfléchie. Deux petits index P et R permettent de mieux suivre le déplacement des ondes progressive et réfléchie

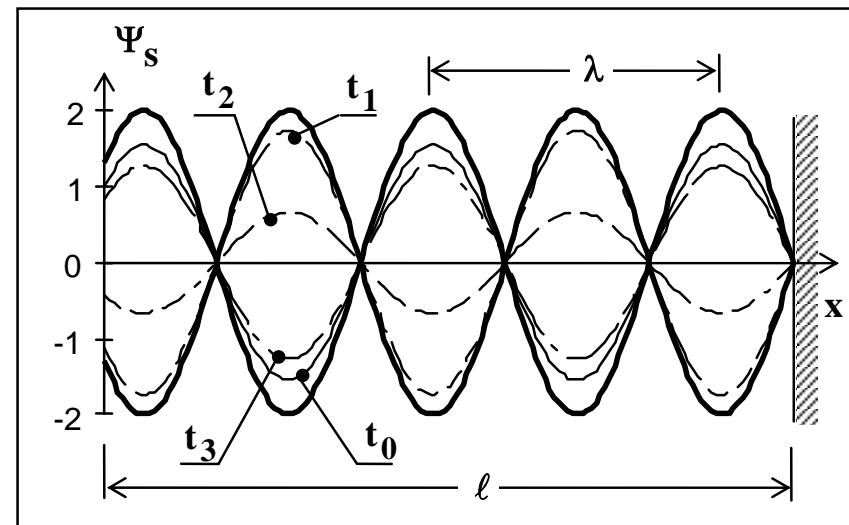


Fig. R.7 Ondes stationnaires (en trait épais) constituées à partir de l'enveloppe des évolutions de l'onde résultante dont la Fig. R.6. montre quelques exemples (attention, l'échelle verticale a été changée).

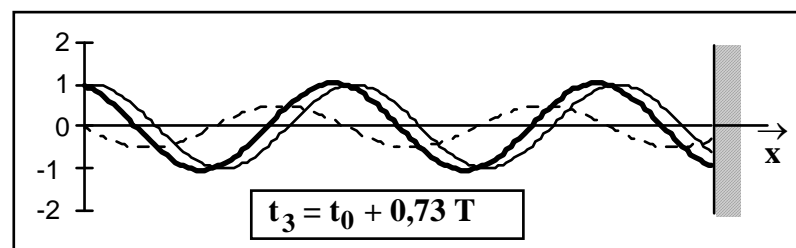
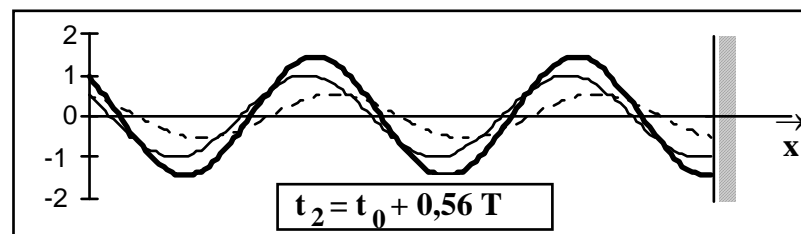
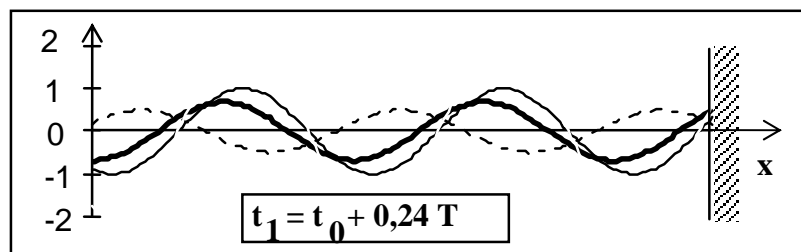
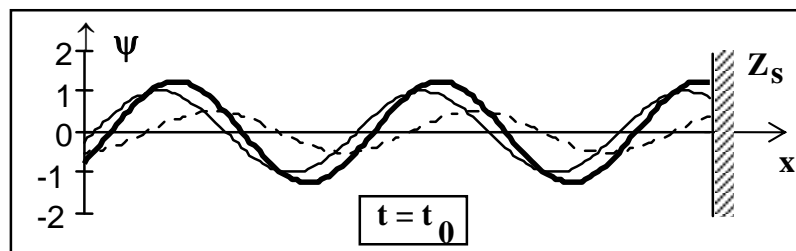


Fig. R.8 (figures ci-contre) - Représentation de la même onde progressive (en trait continu fin) et aux mêmes instants que pour la figure R.6, mais ici elle se réfléchit sur une terminaison de coefficient de réflexion $\rho_0 = + 0,5$ (atténuation, mais pas de déphasage). L'onde réfléchie est en pointillés, l'onde résultante est en trait continu épais.

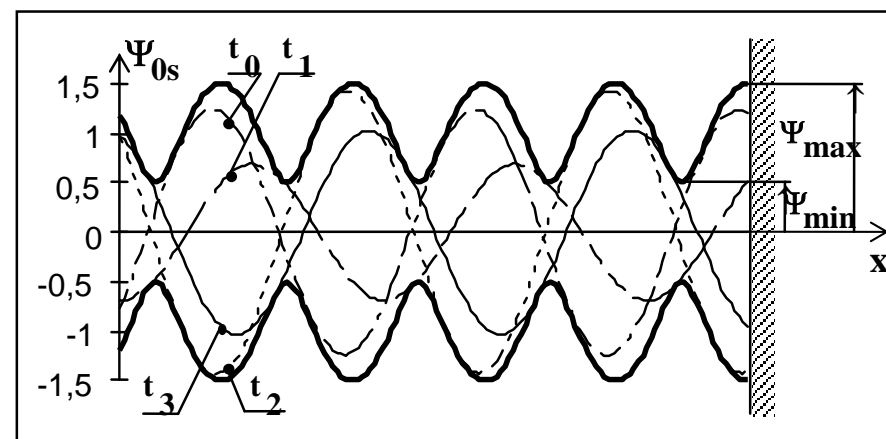


Fig R.9 - Onde stationnaire (en trait épais) constituée de l'enveloppe des évolutions, au cours du temps, de l'onde résultante dont la figure R.8 ci-dessus montre des exemples. On rappelle que $\rho_0 = 0,5$.

T.P. CORDES VIBRANTES
PLOMBÉES OU HOMOGENÈS

I) TRAVAIL PRÉPARATOIRE À FAIRE AVANT DE VENIR EN T.P.

1) Rappels théoriques fondamentaux : voir les "Rappels sur les vibrations...", parties A-II et B

2) Rappels spécifiques à la corde plombée

a) Équations différentielles

Soit une corde plombée comportant n surcharges identiques (Fig. 7.1a), de masse m , équidistantes entre elles ou des extrémités, cette distance commune étant a (si la corde a une longueur ℓ , alors $a = \ell / (n + 1)$). La corde est tendue sous une tension $T_0 \gg mg$ de sorte qu'au repos on puisse considérer qu'elle est rectiligne horizontale : par la suite, on négligera ce terme mg .

Si cette corde est soumise à l'instant initial à une déformation verticale selon l'axe des z , puis abandonnée à elle-même, elle va se mettre à vibrer librement. L'équation différentielle relative au mouvement transversal z_k de la $k^{\text{ième}}$ masse peut être obtenue soit à l'aide de la mécanique vectorielle (principe fondamental de la dynamique), soit à l'aide de la mécanique analytique (équations de Lagrange). Quelle que soit la méthode utilisée, l'équation différentielle régissant le mouvement transversal de la $k^{\text{ième}}$ masse est :

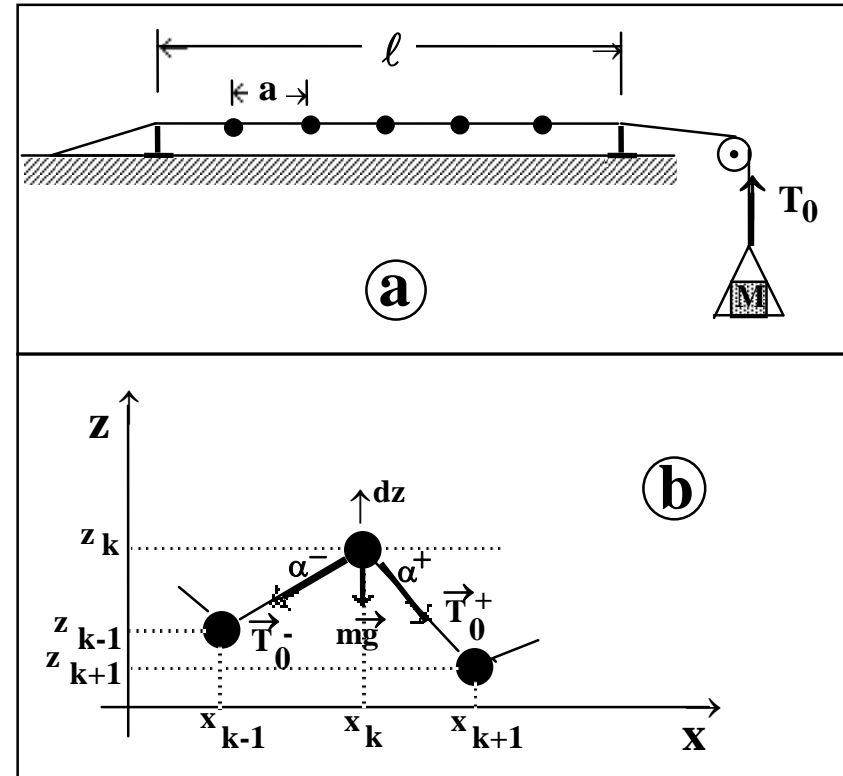


Fig. 7.1 - Modèle de la corde plombée :
a) corde au repos comportant n masselottes identiques, équidistantes
b) $k^{\text{ième}}$ masse et son environnement en mouvement.

$$m\ddot{z}_k + 2\frac{T_0}{a}z_k - \frac{T_0}{a}(z_{k+1} + z_{k-1}) = 0 \quad (1)$$

Cette équation est valable pour toutes les masses m_k , k variant de 1 à n , en tenant compte du fait que $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = 0$

b) fréquences propres de vibration

L'équation du mouvement est donnée par la solution de l'équation différentielle (1) :

Cette équation est exactement l'une des équations du système (R.1) vue au chapitre des Rappels Généraux : **il y aura n configurations possibles, chacune oscillant à l'une des n pulsations propres, racines du système (R.2) des Rappels.**

Remarque : il est possible de déterminer directement à l'aide du système (R.2) les n fréquences propres f_i tant que $n \leq 3$; au delà, cela devient impossible car on ne sait pas résoudre une équation de degré supérieur à 3. Par contre, on peut démontrer que, quel que soit n, ces fréquences propres peuvent être déterminées par la relation :

$$f_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \sin \frac{i\pi}{2(n+1)} \quad (2)$$

où $\begin{cases} n = \text{nombre de masses} \\ i = n^\circ \text{ d'ordre de la fréquence: } i \leq n \end{cases}$

On remarquera en particulier que, quel que soit n, toutes ces fréquences sont inférieures à $f_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T_0}{ma}}$.

2) Modes de vibration d'une corde homogène

L'équation de vibration d'une corde libre peut aisément être obtenue par extension des résultats obtenus pour une corde plombée : en effet, une corde libre, de longueur ℓ tendue par une tension T_0 , peut être considérée comme une juxtaposition de masselottes infinitésimales de masse dm , séparées par une distance dx . L'équation différentielle (1) devient alors :

$$\ddot{z}_k dm + \frac{T_0}{dx} (2z_k - z_{k+1} - z_{k-1}) = 0 \quad (3)$$

soit en effectuant des développements limités au second ordre de z_{k+1} et z_{k-1} au voisinage de x_k puisqu'ils sont infiniment voisins,

$$\begin{cases} z_{k-1} = z_k - \frac{\partial z_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_k^2} dx_k^2 \\ z_{k+1} = z_k + \frac{\partial z_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_k^2} dx_k^2 \end{cases}$$

$$\text{on obtient } \ddot{z}_k dm - \frac{T_0}{dx_k} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_k^2} dx_k^2 = 0 \quad (4)$$

Cette équation est indépendante de l'indice k que l'on oubliera donc par la suite. Si alors on appelle μ la masse linéique ($\mu = dm / dx$), l'équation (4) devient après simplification par dx :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (5)$$

Cette équation est une équation classique de propagation d'ondes se propageant à la vitesse $v = \sqrt{T_0 / \mu}$

On cherchera les solutions de (5) sous forme sinusoïdale conformément à l'équation R.8 :

$$z(x,t) = Z_0 \left[e^{-2j\pi \frac{x-\ell}{\lambda}} + \rho_0 e^{2j\pi \frac{x-\ell}{\lambda}} \right] e^{j\omega \left(t - \frac{\ell}{v} \right)}$$

Or, à chaque instant, la corde doit être immobile à ses deux extrémités : ceci impose $\rho_0 = -1$ (réflexion totale), et une amplitude complexe \bar{Z}_0 nulle pour $x = 0$ et $x = \ell$:

$$\bar{Z}_0(x) = 2Z_0 \sin \left(2\pi \frac{x-\ell}{\lambda} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{Z}_0(0) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_i}{2} = \frac{\ell}{i} \quad i \in N \\ \bar{Z}_0(\ell) = 0 \Rightarrow \text{toujours vérifié} \end{cases}$$

i est l'indice du mode harmonique de vibration.

Dans la mesure où la corde est, conformément à la figure 7.1a, maintenue immobile à ses deux extrémités distantes de ℓ , on aura un système d'ondes stationnaires présentant un nœud de vibration à chaque extrémité. On pourra donc entretenir, à l'aide d'une contrainte sinusoïdale, tous les modes de vibration dont la demi-longueur d'onde $\lambda_i/2$ est un sous multiple entier de la longueur ℓ de la corde :

$$\ell = i\lambda_i/2$$

Or $\lambda_i = \frac{v}{f_i}$: les fréquences de vibrations possibles seront

$$f_i = \frac{i}{2\ell} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad \text{avec } i \text{ entier positif} \quad (6)$$

Par analogie avec la corde plombée pour laquelle on avait autant de modes propres de vibration que de degrés de liberté, ici on a une infinité de degrés de liberté (tous les dm), donc une infinité de fréquences f_i possibles : la fréquence correspondant à $i = 1$, notée f_1 , s'appelle "fréquence fondamentale", les autres modes de vibration correspondant à $i > 1$ sont les modes "harmoniques" : leurs fréquences f_i sont des multiples entiers de la fréquence f_1 du fondamental.

II) MANIPULATION

1) Appareillage

La corde homogène ou plombée, dont la longueur utilisable L est limitée par deux cavaliers métalliques, est tendue (Fig. 7.2) grâce à un crochet auquel peuvent être suspendues des masses variant entre 1 kg et 15 kg.

Un cavalier complémentaire peut être mis sous la corde libre ou sous les masselottes de la corde plombée pour en réduire la longueur utile ℓ .

La corde plombée comporte sur sa longueur totale N masselottes identiques, de masse m , séparées par des distances a identiques.

Les cordes peuvent être excitées au moyen d'un générateur basse fréquence fonctionnant en régime sinusoïdal ; il est associé à un fréquencemètre ; l'excitation est transmise par l'intermédiaire d'électroaimants. La réponse des cordes est détectée à l'aide d'un récepteur (identique à l'excitateur), et analysée à l'oscilloscope. Excitateur et récepteur sont placés à environ 1 à 2 mm de la corde homogène ou des masselottes.

Pour déterminer les fréquences de résonance en régime forcé permanent, on cherchera expérimentalement à l'oscilloscope les fréquences pour lesquelles les amplitudes de vibration sont maximales. Pour ces études, on pourra utiliser le mode XY de l'oscilloscope (Méthode de Lissajous).

2) Vérification de la loi des cordes plombées

On utilisera la corde de longueur L portant $N = 8$ masselottes identiques, de masse m , et séparées par la même distance a (les valeurs de m et de a sont reportées sur la paillasse). Elle sera tendue avec une masse $M = 10$ kg.

Calculer les fréquences de résonance pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 surcharges en utilisant la relation (2). Estimer les incertitudes correspondantes. Combien un système de n masselottes possède-t-il de fréquences de résonance ?

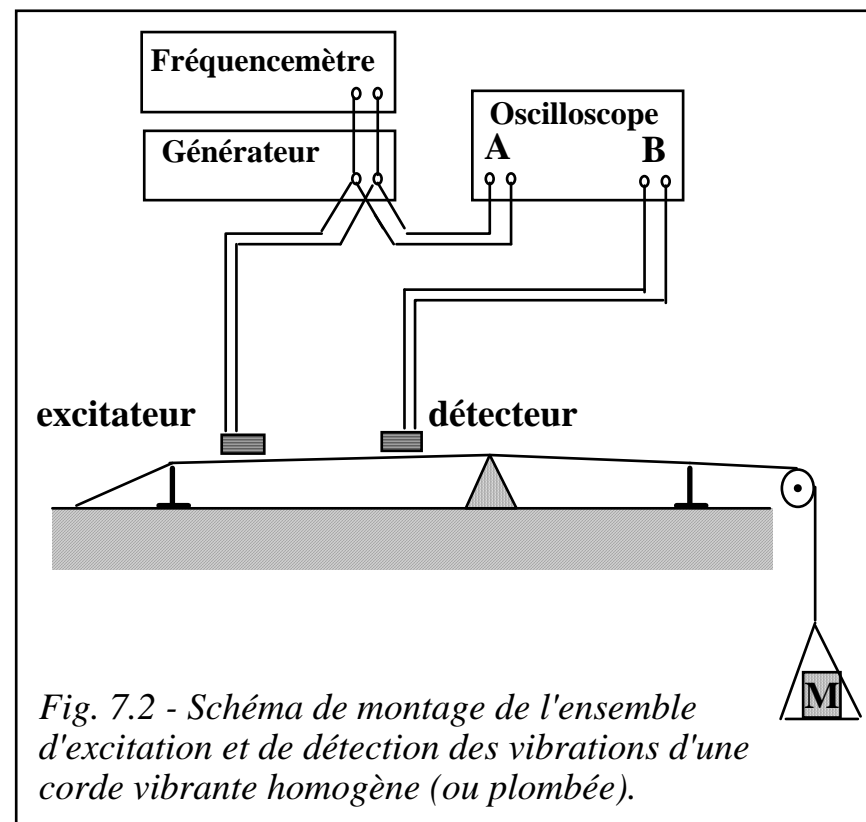
Expérimentalement, on excitera toujours la première masse, et en déplaçant le détecteur, on cherchera les fréquences pour lesquelles les autres masses entreront en résonance: on effectuera cette étude pour des cordes de différentes longueur ℓ supportant successivement $n = 2$, puis 3 , puis 4 , et enfin 5 surcharges. Comparer ces fréquences expérimentales (dont on estimera l'incertitude) avec les fréquences théoriques. Commentaires. Pour chaque mode de résonance, mesurer le déphasage entre deux masselottes au choix. Tracer les schémas de la corde pour chaque cas (un exemple en Fig. R.3). Sont-ils en accord avec les déphasages mesurés ?

3) Vérification de la loi des cordes vibrantes

On cherchera à vérifier la loi des cordes vibrantes (relation (6)) en faisant varier la longueur ℓ de corde puis la masse M suspendue. Tout d'abord mesurer la fréquence f_1 du fondamental pour $\ell = 1$ m et $M = 10$ kg. Comment être sûr qu'il s'agit bien du fondamental et qu'on n'a pas affaire à un harmonique ?

a) Loi des longueurs.

On étudiera la variation de la fréquence f_1 du fondamental en fonction de la longueur utile ℓ de la corde: la corde sera tendue à l'aide d'une masse M de 10 kg. Faire un graphique, en déduire la masse linéique μ de la corde.



b) Loi des tensions.

Etudier pour une corde homogène de longueur $L = 1$ m la variation de f_1 en fonction de la tension de la corde : pour cela on fera varier la masse M suspendue au crochet sans dépasser 10 kg. Faire un graphique, en déduire la masse linéique μ de la corde. Comparer les deux estimations de la masse linéique.

REMARQUE IMPORTANTE : Tout au long de cette manipulation, afin de vérifier la validité des lois proposées, on prendra soin d'estimer les incertitudes de mesure et d'effectuer les calculs d'incertitude nécessaires.

T.P. CIRCUIT ÉLECTRIQUE OSCILLANT

Nous étudierons dans ce T.P. quelques caractéristiques des circuits électriques oscillants (R,L,C) série alimentés en régime sinusoïdal forcé.

D) TRAVAIL PRÉPARATOIRE À FAIRE AVANT DE VENIR EN T.P.

1) Rappels théoriques fondamentaux : voir les "Rappels sur les vibrations..."

2) Analyses préliminaires

La méthode classique d'étude d'un circuit oscillant (R,L,C) série tel que schématisé Fig.1, nécessite l'emploi d'un générateur de fréquence variable disposant d'un réglage d'autant plus fin que la résonance est plus

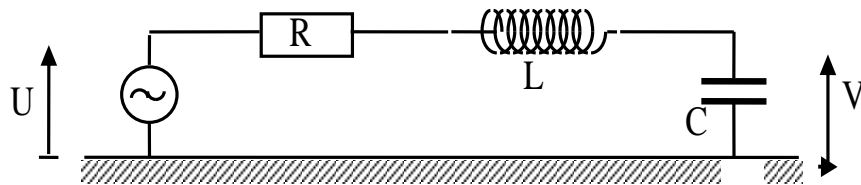


Figure 1

aigüe. Ici on utilisera une méthode plus pratique en utilisant un générateur travaillant avec une fréquence fixe imposée f_0 , et en faisant varier la capacité C. La courbe obtenue (Fig 2) a une allure assez différente de la courbe $V(\omega)$ classique [où $V(\omega)$ représente les variations de la tension V avec la fréquence ω , et qui serait analogue à la courbe $\Psi_{0P}(\omega)$ - figure R.

1b] ; mais ces courbes sont très semblables au voisinage de la résonance dans le cas d'une résonance aigüe. Si on étudie la courbe (Fig. 2) donnant la tension $V(C)$ entre les bornes A et B en fonction de la capacité C du circuit, on peut en déduire le coefficient de qualité Q du circuit tel que $Q = L\omega_0/R$ où L et R sont la self totale et la résistance totale du circuit (par analogie avec la définition du coefficient de qualité d'une self $Q_L = \ell\omega_0/r_\ell$ où ℓ et r_ℓ sont la self et la résistance propre de la self : Q_L est ainsi le rapport de la partie réactive $\ell\omega$ à la partie résistive r_ℓ de la self).

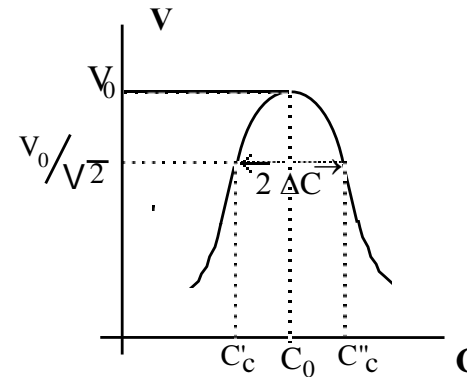


Figure 2

Montrer que V passe par un maximum V_0 tel que :

$$V_0 = U\sqrt{1 + Q^2}$$

Ce maximum étant obtenu pour une valeur C_0 de la capacité telle que

$$C_0 = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

On pourra ensuite montrer que pour des valeurs C de la capacité, différentes de C_0 , telles que

$$C = C_0 + \delta C$$

la tension V aux bornes de C peut s'écrire (relation 1) :

$$\frac{V}{V_0} \approx \sqrt{\frac{1}{1+Q^2\left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2}}$$

Enfin, les valeurs particulières C_C de C pour lesquelles V/V_0 est égal à $1/\sqrt{2}$ sont telles que $C_C = C_0 \pm \Delta C$, d'où

$$1+Q^2\left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2=2 \quad \text{soit } Q\left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)=1$$

De l'étude des variations de V avec C on déduit la valeur de Q :

$$\boxed{Q = C_0/\Delta C} \quad (\text{relation 2})$$

On montrera que si $Q \gg 1$, alors $Q \approx V_0 / U$; c'est pourquoi Q est souvent appelé **coefficient de surtension du circuit**.

II) TRAVAIL PRÉLIMINAIRE À FAIRE EN ARRIVANT

- Reconnaître les éléments de la platine;
- Le générateur de fonction sera utilisé en mode sinusoïdal, avec une fréquence fixe $f_0 = 140$ kHz, et une amplitude crête de 1 volt (ou crête à crête de 2 volts). L'impédance interne R_i de ce générateur vaut 50Ω .
- Le voltmètre a une capacité d'entrée de 50 pF.
- Les câbles coaxiaux ont chacun une capacité de 100 pF.

1) Donner le schéma équivalent du générateur.

2) Visualiser le signal de sortie du générateur à l'oscilloscope, et contrôler l'amplitude crête.

3) Appliquer le signal sur les bornes d'entrée de la platine du circuit oscillant, en ayant soin de ne pas le fermer (cavaliers enlevés). Mesurer la tension d'entrée du circuit à l'aide du voltmètre. Comparer cette valeur lue à celle trouvée précédemment. Interprétation.

4) Fermer le circuit en montant (R-L) et la capacité variable en série. Pour tracer la courbe de résonance du circuit oscillant, il est alors indispensable que la tension U appliquée à l'entrée du circuit reste constante. Or l'impédance Z du circuit oscillant varie avec C : loin de la résonance, elle est de plusieurs centaines de $k\Omega$, tandis qu'à la résonance, elle est de l'ordre de 80Ω . Compte tenu de ces informations et du schéma équivalent du générateur, en déduire la valeur théorique de l'amplitude de la tension d'entrée U du circuit loin de la résonance et à la résonance. Contrôler expérimentalement ces valeurs de la tension d'entrée.

5) Afin de minimiser de telles variations de la tension d'entrée, on cherche à faire en sorte que l'impédance interne R_i du générateur soit très petite par rapport à Z , même à la résonance. Pour cela, on place en parallèle sur l'entrée du circuit une résistance $\rho = 0,8 \Omega$. Donner le schéma équivalent de Thévenin du nouveau "générateur" ; on précisera les valeurs E_{Th} et R_{Th} . Montrer que la tension d'entrée du circuit (R,L,C) est alors pratiquement constante : on calculera en particulier cette tension à la résonance, et on vérifiera expérimentalement ces résultats.

III) MANIPULATION PROPREMENT DITE.

1) Tracer la courbe $V(C)$ à l'aide de la courbe d'étalonnage ou de la table de valeurs numériques de la capacité variable que l'on trouvera sur la paillasse - on n'oubliera pas de tenir compte des capacités d'entrée des appareils et des câbles coaxiaux-

En déduire le coefficient de surtension Q du circuit.

2) Mesures de capacités.

On se propose de mesurer deux capacités inconnues C_x et C_x' . La méthode suivie consiste à ajouter successivement les capacités inconnues C_x et C_x' en parallèle ou en série suivant le cas avec la capacité variable puis de modifier cette dernière afin de retrouver la résonance.

On rappelle que pour ne pas trop modifier les caractéristiques du circuit initial, une faible capacité doit être branchée en parallèle, et une forte capacité branchée en série.

3) Mesure d'une faible impédance.

Intercaler en série dans le circuit oscillant une faible impédance $z = r + jx$. Tracer dans ces conditions la nouvelle courbe $V'(C)$, où V' est toujours la tension aux bornes de la capacité variable.

On constatera que le maximum de V' est obtenu pour une valeur C_0' de C , différente de C_0 , et qu'il est plus faible que pour la courbe précédente (obtenue au paragraphe 6). En déduire le nouveau coefficient de surtension Q' . Calculer alors r et x : pour cela on notera - et on pourra démontrer - que, si en absence de l'impédance z on avait $LC_0\omega_0^2 = 1$ et $Q = L\omega_0/R$, en présence de l'impédance z on a :

$$(L\omega_0 + x).C_0'\omega_0 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{L\omega_0 + x}{R + r} = Q'$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{C_0'} - \frac{1}{C_0} \right) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{Q' C_0'} - \frac{1}{Q C_0} \right)$$

Proposer une deuxième méthode pour mesurer Q' .

Cette équation permet de calculer les N pulsations propres.

b) Oscillations couplées forcées

Pour faciliter la compréhension des phénomènes, on raisonne à l'aide d'un circuit comportant 3 bobines couplées montées sur le même axe.

Comme précédemment, on analysera les oscillations (vibrations) d'un système de trois circuits oscillants LC couplés par mutuelle inductance, le circuit (1) étant alimenté ("forcé") par un générateur de tension délivrant une f.e.m. sinusoïdale

$$E = E_0 \exp(j\omega t)$$

Les oscillations du générateur seront prises comme référence des phases.

Dans ces conditions les équations du tableau (I) deviennent

:

$$\begin{cases} LI_1'' + M_{12}I_2'' + M_{13}I_3'' + \frac{1}{C}I_1 = j\omega E_0 e^{j\omega t} \\ M_{21}I_1'' + LI_2'' + M_{23}I_3'' + \frac{1}{C}I_2 = 0 \\ M_{31}I_1'' + M_{32}I_2'' + LI_3'' + \frac{1}{C}I_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Or les 3 circuits LC sont identiques, et régulièrement disposés dans l'ordre 1, 2, 3 : on a donc $M_{12} = M_{21} = M_{23} = M_{32}$, que l'on posera égal à M1 ; de même $M_{13} = M_{31}$, que l'on posera égal à M2. En outre, en régime permanent, les intensités seront sinusoïdales, avec la fréquence ω du générateur :

$$I_i = I_{0i} \exp j(\omega t + \Phi_i)$$

Dans ces conditions, et en posant toujours $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le système (IV) peut s'écrire :

$$\begin{cases} L(\omega^2 - \omega_0^2)I_{01}e^{j\Phi_1} + M1\omega^2 I_{02}e^{j\Phi_2} + M2\omega^2 I_{03}e^{j\Phi_3} = -j\omega E_0 \\ M1\omega^2 I_{01}e^{j\Phi_1} + L(\omega^2 - \omega_0^2)I_{02}e^{j\Phi_2} + M1\omega^2 I_{03}e^{j\Phi_3} = 0 \\ M2\omega^2 I_{01}e^{j\Phi_1} + M1\omega^2 I_{02}e^{j\Phi_2} + L(\omega^2 - \omega_0^2)I_{03}e^{j\Phi_3} = 0 \end{cases} \quad \text{(V)}$$

La résolution de ce système montre que pour trois valeurs particulières ω_1, ω_2 et ω_3 de ω , les intensités I_{0i} tendent vers l'infini : le système oscillant possède trois fréquences de résonance (comme pour les 3 masses en mécanique).

L'ensemble de ces équations, associées à des résultats expérimentaux, permet de déterminer les rapports M1/L et M2/L, ainsi que les valeurs des Φ_i lorsque ω varie.

N.B. Le système mécanique de la corde portant 3 masses identiques, analysé dans les "Rappels sur les vibrations ...", devrait constituer une bonne analogie du système électrique à trois bobines.

Pourtant, on peut constater une grosse différence entre les deux systèmes. En effet, dans le système mécanique, la masse d'ordre k n'est reliée qu'aux masses d'ordre k-1 et k+1 : le couplage n'existe qu'entre premiers voisins. Par contre dans le système électrique, les phénomènes électromagnétiques s'étendant à tout l'espace : le k^{ième} circuit est couplé à tous les autres par induction mutuelle. On constatera ainsi que les équations du système électrique (système d'équations V) comportent beaucoup plus de termes que les équations du système mécanique (système d'équations R.4). On devra donc s'attendre à observer des différences fondamentales entre les réponses des deux systèmes.

Cependant, les inductions mutuelles sont des coefficients traduisant l'action du champ magnétique créé par un circuit (k) sur tous les autres circuits : or le champ d'induction magnétique obéit à la loi en $1/r^2$ de Biot et Savard. On est donc conduit à en

déduire que les coefficients d'induction mutuelle diminuent très vite avec la distance r séparant les circuits : on pourra donc, en première approximation, négliger les couplages entre voisins d'ordre supérieur à 1, c'est à dire assumer que $M1 \gg M2$

Il ne faudra donc pas s'étonner de l'existence de petites différences entre ces expériences effectuées avec des circuits électriques, et la théorie effectuée à partir d'un modèle mécanique : il sera bon de mettre en évidence et de chercher à justifier ces différences.

II) MANIPULATION

- Tous les circuits LC utilisés (voir figure 1) ont été accordés individuellement sur la même fréquence (400 kHz). Pour cela on a tenu compte dans la valeur de C des capacités des fils coaxiaux, de la capacité de sortie du générateur, et des capacités d'entrée des voltmètres et de l'oscilloscope.

Utiliser le générateur en veillant à ce que la tension de sortie lue sur le millivoltmètre associé ne dépasse pas 1 V

On excitera toujours le circuit (1), celui qui est placé à la droite du système.

- La lecture de la tension aux bornes des circuits oscillants (sauf le circuit (1)) se fera par l'intermédiaire d'une sonde de capacité 12 pF : les circuits 2 à N sur lesquels n'est pas branchée la sonde devront comporter à la place une capacité de 12 pF.
- Les déphasages entre le circuit (1) pris comme référence et les autres circuits, seront déterminés à l'oscilloscope soit par visualisation des deux courbes de tension en simultané, soit par la méthode de Lissajous.

(on rappelle que le mode d'utilisation de l'oscilloscope en "Lissajous" consiste à comparer deux signaux, l'un envoyé en voie horizontale, l'autre en voie verticale ; celui qui est envoyé en voie horizontale sert alors de référence)

Enfin pour ne pas introduire de déphasage supplémentaire π , il importe que toutes les bobines soient "bobinées" dans le même sens : il faudra donc respecter les couleurs des bornes (bornes bleues toutes du même coté).

1) Recherche des fréquences de résonance et d'antirésonance

Pour cette étude, on se placera toujours au couplage maximum (bobines accolées).

Etudier successivement les cas $N = 2, 3$ ou 4 bobines. Pour chaque valeur de N , mesurer les N fréquences de résonance et les $(N-1)$ fréquences d'antirésonance. Pour chacune de ces fréquences caractéristiques, mesurer le déphasage entre deux circuits.

Tracer les schémas des cordes chargées de N masses pour les N modes de résonance (un exemple en fig. R.3). Y-a-t-il accord avec les mesures de déphasage sur les bobines ? Commentaire.

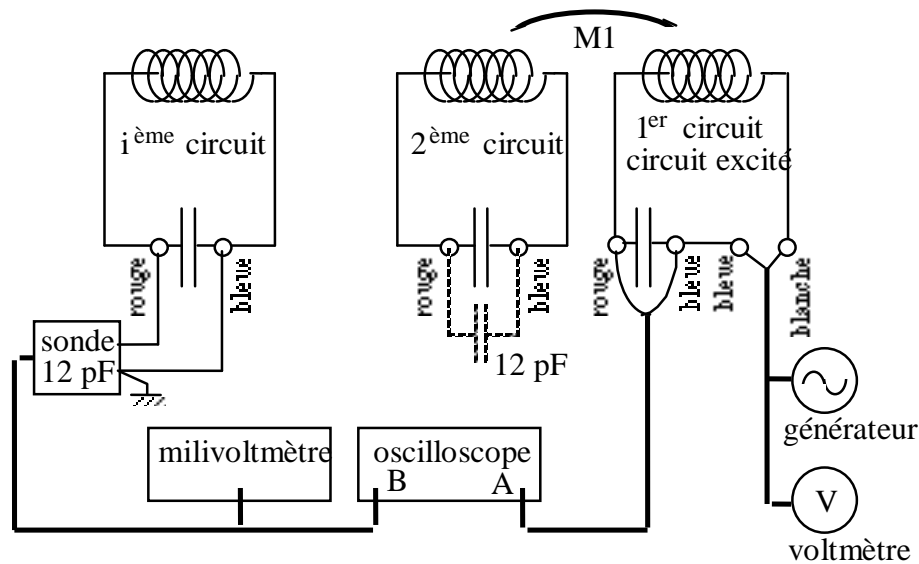


Fig. 1 - Schéma du montage

Les masses des appareils sont reliées aux bornes bleues des circuits

Note concernant les parties 2) et 3)

Dans les parties 2) et 3) les mesures des tensions de sortie V_{sj} (à l'aide de la sonde, $j = 2, 3$ ou 4)) et de la tension d'entrée V_e en fonction de la fréquence seront faites en temps réel à l'aide d'un ordinateur équipé d'un système d'acquisition.

Principe : pour faire varier la fréquence F , une rampe linéaire de tension est appliquée à la borne VCO_{IN} du générateur.

L'acquisition se fait alors en fonction du temps, la visualisation du signal mesuré se fait dans la fenêtre 1. Un programme donné dans la feuille de calcul permet de convertir le temps de mesure en fréquence, et de calculer le rapport $rap_j = V_{sj}/V_e$. On visualise alors dans la fenêtre 2 la représentation de la courbe de résonance $V_{sj}/V_e = f(F)$ où F est la fréquence (KHz).

- Ouvrir le fichier « copie de circuits LC couplés », et le sauver immédiatement au nom de votre binôme.
- Régler la fréquence du générateur sur 300 KHz, et ne plus y toucher.
- Régler le calibre du voltmètre Marconi sur 2 V et ne plus y toucher.

2) Variations des amplitudes de vibration avec la fréquence.

Ne pas dépasser une tension d'entrée de 1V.

- Pour $N = 3$, mesurer en fonction de la fréquence les rapports $rap_j = V_{sj}/V_e$ où V_{sj} est l'amplitude de la tension aux bornes du circuit ($j=3$), puis aux bornes du circuit ($j=2$).
- Analyser les deux courbes $rap_j = V_{sj}/V_e = f(F)$ en calculant en particulier les bandes passantes et les hauteurs.
- Comparer les deux courbes et interpréter les différences. Comparer avec un système formé de 3 masselottes.

3) Variations des fréquences de résonance avec le couplage.

- Pour $N=4$, toujours à l'aide du système d'acquisition, tracer les courbes $V_{s4}/V_e = f(F)$ pour une distance x entre circuits LC que l'on fera varier. A l'aide du logiciel, mesurer les 4 fréquences F_j ($j=1\dots 4$) de résonance pour chaque valeur de x .
- Tracer sur un même graphique, pour $N = 4$, les courbes de variation des F_j en fonction de la distance x séparant les circuits LC (Fig 2).
- Interpréter les résultats.

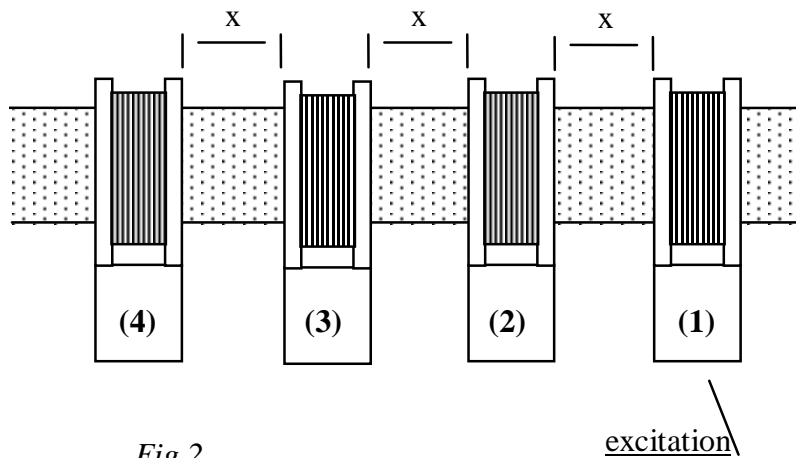


Fig.2